UNIVERSIDADE DE LISBOA

INSTITUTO DE EDUCAÇÃO

COMUNICAÇÃO ESCRITA MATEMÁTICA DE ALUNOS DO 2.º CICLO DO ENSINO BÁSICO

Patrícia Sofia Machado Martins

Dissertação

Mestrado em Educação

Especialização em Didática da Matemática

2012

UNIVERSIDADE DE LISBOA

INSTITUTO DE EDUCAÇÃO

COMUNICAÇÃO ESCRITA MATEMÁTICA
DE ALUNOS DO 2.º CICLO DO ENSINO BÁSICO

Patrícia Sofia Machado Martins

Dissertação orientada
pela Prof.ª Doutora Maria Leonor Santos

2012

Resumo

O presente estudo procura compreender e analisar o contributo das produções escritas em Matemática de alunos do 2.ºciclo, quando acompanhadas de feedback fornecido pelo professor, para o desenvolvimento da sua comunicação escrita matemática, tendo em conta as seguintes questões orientadoras:

1 - Quais as representações mais frequentemente usadas por alunos do 2.º ciclo na comunicação escrita matemática dos relatórios escritos?

2 - Quais as principais dificuldades evidenciadas por alunos do 2.º ciclo na comunicação escrita matemática dos relatórios escritos? De que forma os registos escritos permitem aos alunos identificá-las e como procuram ultrapassá-las?

3 - De que forma a utilização de comentários do professor às produções dos alunos (feedback) contribuem para o aperfeiçoamento da comunicação escrita matemática em alunos do 2.º ciclo?

4 - De que modo evolui a comunicação matemática em alunos do 2.º ciclo ao longo dos registos escritos?

Optou-se por um paradigma interpretativo e uma abordagem qualitativa e foram realizados três estudos de caso, correspondentes a cada um dos alunos, Filipe, Jéssica e Isabel, respetivamente. A recolha de dados foi feita através da observação de aulas; da recolha das duas versões de cada relatório elaborado, sendo a primeira versão feita em grupo e a segunda versão realizada individualmente; entrevistas individuais realizadas a cada um dos três alunos no início do estudo e após cada uma das tarefas. A análise de dados foi feita a partir da interpretação feita aos enunciados, as estratégias e representações utilizadas e a evolução da primeira para a segunda versão.

Neste estudo, o relatório escrito revelou-se de grande importância porque apelou os alunos para a descrição de procedimentos e análise dos resultados obtidos, proporcionando-lhes momentos de reflexão e de autoavaliação das suas aprendizagens, com implicações para o desenvolvimento da sua capacidade de comunicação escrita matemática. Analisando a evolução que os alunos tiveram da primeira para a segunda versão em todas as tarefas é possível verificar que, em geral, os alunos acederam às ideias apresentadas no relatório na primeira versão e utilizaram-nas para aumentar a sua capacidade de pensamento matemático. Uma das limitações foi a gestão do tempo de realização do relatório escrito, o que sugere a necessidade de ser concluído na aula seguinte.

Palavras-Chave: Comunicação escrita matemática, relatório escrito, representações, feedback, autoavaliação.

Abstract

This study seeks to understand and analyze the contribution of written productions of students in Mathematics 2^{nd}. Cycle, when accompanied by feedback provided by the teacher to develop their written communication mathematics, taking into account the following guiding questions:

1- What are the representations most often used by 2^{nd}. Cycle students in written communication mathematics of written reports?

2- What are the main difficulties evidenced by students of the 2^{nd}. Cycle in written communication mathematics of written reports? How the written records allow students to identify them and how look to overcome them?

3- How does the use of teacher comments on students' productions (feedback) contribute to the improvement of written communication in mathematics pupils 2nd. Cycle?

4- How evolving communication mathematics of students in 2nd. Cycle over the written records?

There was an option to an interpretative paradigm and a qualitative approach and were performed three case studies, corresponding to each of the students, Philip, Jessica and Elizabeth, respectively. Data collection was done through classroom observation, the collection of the two versions of each report, the first version done as a group and individually held second version; individual interviews with each of the three students at baseline and after each task. The data analysis was made from the interpretation of the statements, representations and the strategies used and the evolution from the first to the second version.

In this study, the written report proved to be of great importance because appealed the students to the description of procedures and analysis of results, providing them with moments of reflection and self-assessment of their learning, with implications for the development of their skills on writing mathematical communication. Analyzing the evolution that students had from the first to the second version of all the tasks you can check that in general, students gained access to the ideas presented in the report on the first version and used them to increase their capacity for mathematical thinking. One limitation was the time management of completion of written report, which suggests the need to be completed in the next class.

Keywords: Writing communication mathematical, written report, representations, feedback, self-assessment.

Agradecimentos

À Profª Doutora Maria Leonor de Almeida Domingues dos Santos pela amizade, paciência e conselhos sábios com que me presenteou durante a execução deste trabalho.

Aos alunos que participaram no estudo e permitiram que se realizasse

À minha filha Mariana pela alegria que me transmite diariamente e por tantas brincadeiras adiadas.

Ao António por ter sido paciente e partilhado comigo as tarefas próprias da maternidade e que tanto tempo consomem…

Aos meus pais e a todos os meus amigos e familiares que, com a sua ajuda e apoio tornaram possível a realização deste meu projeto.

À Fatinha pela força que me contagiou e que me ajudou a concluir esta dissertação

Índice

Capítulo I

Introdução

Problema e questões de estudo

As orientações curriculares para o ensino básico salientam que todas as crianças devem aprender a gostar de Matemática, encarando-a como um desafio (DEB, 2001). Em PMEB (2007) é referido que a disciplina de Matemática no Ensino Básico deve não só proporcionar a formação matemática necessária, mas também contribuir para o desenvolvimento pessoal do aluno. Destacam, igualmente, o papel do professor na criação de um ambiente de trabalho ativo, repleto de experiências dinâmicas de aprendizagem, adequadas e variadas, indicando a resolução de problemas como um momento especial de interação e diálogo. Uma das funções fundamentais do professor na sua interação com os alunos é saber ouvir, perguntar *porquê*, lançar pistas, aproveitar o erro para lançar novas perguntas e também saber estimular essa atitude nos seus alunos (DEB, 2001), criando assim, uma verdadeira atmosfera de aprendizagem onde todos interagem, trocando informações, influenciando-se reciprocamente.

A comunicação pode ser encarada como um objetivo curricular, pois por um lado pode ser vista como uma metodologia de ensino e por outro pode ser vista como conhecimento e compreensão matemática a desenvolver (Lampert & Cobb, 2003). A comunicação matemática está, portanto, ao serviço da aquisição de conhecimentos, mas também é parte integrante dessa mesma aprendizagem, saindo reforçada a ideia de que, mais do que trocar informações, a comunicação se traduz na partilha e negociação de significados entre os interlocutores (Bauersfeld, 1994; Yackel, 1995; Sierpinska, 1998; Godino e Llinares, 2000; Ponte e Serrazina, 2000).

A comunicação pode ser vista como uma ferramenta importante que permite ao aluno o desenvolvimento do seu raciocínio e da sua capacidade de resolução de problemas, mas também pode acontecer o inverso porque "o desenvolvimento destas capacidades favorece o desenvolvimento da capacidade de comunicação por parte do aluno" (Ponte *et al.*, 2007, p. 7). É através da discussão oral na aula, que os alunos confrontam as suas estratégias de resolução de problemas e identificam os raciocínios produzidos pelos seus colegas e através da escrita de textos têm oportunidade de clarificar e elaborar, de modo mais aprofundado, as suas estratégias e os seus argumentos, desenvolvendo a sua sensibilidade para a importância do rigor no uso da linguagem matemática (PMEB, 2007).

No Novo Programa da Matemática (Ponte *et al*., 2007) vêm indicados, para além dos temas matemáticos, três capacidades transversais à aprendizagem da Matemática: Resolução de Problemas, Raciocínio Matemático e Comunicação Matemática. Contudo, será a comunicação matemática a capacidade transversal a que primordialmente será dada atenção neste estudo, mais especificamente a comunicação escrita matemática de alunos do 5.ºano de escolaridade.

As normas curriculares fazem apelo a um contexto de comunicação, em que a avaliação da capacidade dos alunos em comunicar matematicamente deve evidenciar que eles são capazes de compreender, interpretar e avaliar ideias matemáticas apresentadas de forma escrita, oral e visual (NCTM, 1991; 2007). Por isso, é importante que se proporcionem aos alunos situações que envolvam a escrita de textos, pois é assim que "os alunos têm oportunidade de clarificar e elaborar de modo mais aprofundado as suas estratégias e os seus argumentos, reconhecendo a importância do rigor no uso da linguagem matemática" (Semana & Santos, 2008a, p. 53).

Neste estudo, onde se procura compreender o desenvolvimento da comunicação escrita de alunos no 2.ºciclo é dada particular atenção aos relatórios escritos dos alunos sobre tarefas realizadas na aula, que são utilizados como instrumento de avaliação reguladora, pois "o conhecimento sobre o que os alunos pensam e que estratégias utilizam nos procedimentos avaliativos é outra área em que, pela sua importância, é premente dar-se a devida atenção" (Santos, 2004, p.18). Quando se fala sobre regulação pedagógica também é necessário falar num processo de comunicação, porque a regulação pode ser feita, nomeadamente o feedback, "através do diálogo ou por escrito, através de anotações, isto é, por um dizer avaliativo" (Pinto & Santos, 2006, p. 105).

O presente estudo procura compreender e analisar o contributo das produções escritas em Matemática de alunos do 2.ºciclo, quando acompanhadas de feedback fornecido pelo professor, para o desenvolvimento da sua comunicação escrita matemática, tendo em conta as seguintes questões orientadoras:

1 - Quais as representações mais frequentemente usadas por alunos do 2.º ciclo na comunicação escrita matemática dos registos escritos?

2 - Quais as principais dificuldades evidenciadas por alunos do 2.º ciclo na comunicação escrita matemática dos registos escritos? De que forma os registos escritos permitem aos alunos identificá-las e como procuram ultrapassá-las?

3 - De que forma a utilização de comentários do professor às produções dos alunos (feedback) contribuem para o aperfeiçoamento da comunicação escrita matemática em alunos do 2.º ciclo?

4 - De que modo evolui a comunicação matemática em alunos do 2.º ciclo ao longo dos registos escritos?

Relevância do estudo

No Novo Programa de Matemática do Ensino Básico (Ponte *et al*., 2007) a Comunicação Matemática vem referenciada como uma competência transversal à aprendizagem da Matemática. No entanto, a Comunicação Matemática tem sido muitas vezes associada à área de Língua Portuguesa e este facto vem mencionado por Menezes *et al* (2005), a partir de um estudo no 1.º ciclo, onde se faz referência à comunicação matemática como um conteúdo de aprendizagem ou como metodologia de ensino. A matemática tem sido apelidada de linguagem universal da ciência, sendo ela mesma detentora de uma linguagem própria que permite a comunicação entre os "iniciados" (Menezes, 1999). Por este motivo, neste estudo pretendo analisar as produções escritas dos alunos tendo em conta os processos inerentes à comunicação escrita matemática: interpretação, expressão, representação e discussão (PMEB, 2007).

A comunicação é vista pelos professores como uma capacidade a desenvolver, embora façam poucas referências à utilização de registos escritos (Ponte e*t al*, 2007, p.7) e a necessidade da realização do estudo sobre o desenvolvimento da comunicação escrita matemática surgiu a partir da reflexão sobre a minha prática profissional.

A comunicação é considerada um pilar essencial das aprendizagens matemáticas pela sua função decisiva para a construção de significados e uma das funções importantes que o professor tem é negociar, modificar e dar forma à linguagem dos alunos de modo a que se torne matematicamente adequada (Bishop & Goffree, 1986).

Enquanto a linguagem oral serve de suporte ao pensamento, a linguagem escrita é "uma forma de comunicação que tem um papel complementar fundamental no ensino-aprendizagem" da Matemática (Ponte *et al*, 2007, p.7) e no desenvolvimento da sua capacidade de comunicação matemática, pois quando os alunos escrevem e falam sobre a matemática utilizam a linguagem para expressar pensamentos, partilhar significados e compreender argumentos apresentados por outros e segundo estes autores os registos escritos auxiliam a reflexão e "privilegiam o retorno ao conhecimento construído" (Ponte *et al*, 2007, p.7).

A opção pelo estudo da comunicação escrita matemática de alunos do 2º.ciclo do Ensino Básico deve-se ao facto de ser o nível de ensino que leciono, podendo acompanhar regularmente a sua evolução e pela necessidade de analisar as estratégias utilizadas pelos alunos e as dificuldades sentidas, para poder efetuar também uma reflexão sobre a minha prática letiva. Para além do desenvolvimento da capacidade de comunicação escrita pretendo também analisar a construção dos significados matemáticos dos alunos e a sua capacidade de auto-regulação. Um dos aspetos referidos no estudo é o modo como a utilização de questões nos comentários do professor às produções dos alunos (feedback) contribuem para o desenvolvimento da comunicação escrita matemática em alunos do 2º.ciclo. Esta questão surgiu porque as tarefas utilizadas neste estudo propiciam a elaboração de relatórios escritos, que por sua vez sugerem a atribuição de um feedback, sendo necessário analisar as dificuldades e "alguns padrões auto-impostos nos alunos" (Semana e Santos, 2009, p. 12). Desta forma, é necessário analisar como o feedback escrito dado às produções escritas dos alunos contribui para as suas aprendizagens, tendo em vista uma avaliação reguladora das aprendizagens (Dias, 2009) e o desenvolvimento da comunicação escrita matemática.

Capítulo II

Tarefas matemáticas

Orientações curriculares

A matemática é encarada como Património Cultural da Humanidade e surge destacada como a ciência das regularidades e da linguagem dos números, das formas e das relações, devendo a sua aprendizagem ser vista como um processo gradual e contínuo ao longo do Ensino Básico (DEB, 2001a). A necessidade de compreender e usar a matemática na vida quotidiana e no local de trabalho é cada vez mais essencial, pois o mundo encontra-se em mudança e assim sendo "aqueles que compreendem e são capazes de fazer matemática terão oportunidades e opções significativamente maiores para construir o futuro" (NCTM, 2007, p. 5).

O ensino da Matemática não é encarado como um somatório de conteúdos matemáticos específicos, mas sim como "a promoção de uma educação em matemática, sobre a matemática e através da matemática, contribuindo para a formação geral do aluno" (DEB,2001a, p. 58). As duas principais finalidades do ensino da Matemática no Ensino Básico são "(…) proporcionar aos alunos um contacto com as ideias e métodos fundamentais da Matemática, que lhes permita apreciar o seu valor e a sua natureza, e desenvolver a capacidade e confiança pessoal no uso da Matemática para analisar e resolver situações problemáticas, para raciocinar e comunicar" (DEB, 2001a, pp. 58-59). Mais recentemente, no PMEB (Ponte *et al.*, 2007, p. 3) é referido que o ensino da Matemática, ao longo dos três ciclos da escolaridade básica, deve ser orientado por duas finalidades fundamentais:

> *a) Promover a aquisição de informação, conhecimento e experiência em Matemática e o desenvolvimento da capacidade da sua integração e mobilização em contextos diversificados.*
> *b) Desenvolver atitudes positivas face à Matemática e a capacidade de apreciar esta ciência.*

A estas finalidades estão associados um conjunto de objetivos gerais para o ensino da Matemática, nos quais se encontra referenciado que os alunos devem ser capazes de:

1- *Conhecer os factos e procedimentos básicos da matemática*
2- *Desenvolver uma compreensão da matemática*
3- *Lidar com ideias matemáticas em diversas representações*
4- *Comunicar as suas ideias e interpretar as ideias dos outros*
5- *Raciocinar matematicamente*
6- *Resolver problemas*
7- *Estabelecer conexões*
8- *Fazer matemática de modo autónomo*
9- *Apreciar a matemática*

Para que estes objetivos possam ser atingidos, tanto em CNEB (DEB, 2001a) como no PMEB (Ponte *et al*, 2007) é feita referência à necessidade de diversificação das tarefas apresentadas aos alunos, para que haja diversidade de experiências matemáticas. São mencionadas formas de operacionalização, como a resolução de problemas, atividades de investigação, realização de projetos e jogos e também são referidos aspetos da história, do desenvolvimento e da utilização da Matemática, aspetos transversais da Matemática e recursos, como por exemplo as tecnologias ou os materiais manipuláveis (DEB, 2001a, 2001; Ponte *et al*., 2007). Deste modo, há a necessidade de recorrer a vários tipos de tarefas - exercícios, problemas, tarefas de exploração e tarefas de investigação (Ponte, 2005), para que haja um ensino efetivo. Os alunos devem estar num ambiente de aprendizagem em que possam participar em numerosas e variadas experiências e sejam encorajados a explorar, fazer tentativas, experimentar várias formas de resolução de problemas, cometer erros e corrigi-los, para que desta forma possam adquirir confiança na sua capacidade de resolver problemas complexos e desenvolver o seu "poder matemático" (NCTM,1989), ou seja, a capacidade de explorar, conjeturar e raciocinar matematicamente. Para que tal aconteça, os alunos devem ser encorajados a ler, escrever e discutir matemática, conjeturar, testar e construir argumentos e contra-argumentos sobre a validade da conjetura (NCTM, 1989, 2007; Ponte *et al*., 2007).

Também no CNEB (DEB, 2001) é referida a importância da comunicação matemática. Esta surge como um aspeto transversal da aprendizagem da Matemática. Inclui a leitura, a interpretação e a escrita de pequenos textos de matemática, sobre a matemática ou em que haja informação matemática. É salientado que o rigor da linguagem e o formalismo não devem ser impostos, mas sim entendidos como uma necessidade e é dada importância a experiências de argumentação e de discussão em grande e pequeno grupo. Para além da comunicação matemática, outros aspetos transversais da aprendizagem da matemática que constam no CNEB (DEB, 2001) são:

- A prática compreensiva de procedimentos, para promover a aquisição de determinadas destrezas utilizáveis com segurança e autonomia;

- A exploração de conexões, que podem ocorrer de diferentes formas: entre ideias matemáticas; entre diferentes temas de matemática ou no interior de cada tema; e também entre ideias matemáticas e outras áreas de aprendizagem.

Mais recentemente, a comunicação continua a ser vista como parte essencial da educação matemática, na medida em que tem grande importância na organização e consolidação do pensamento matemático (NCTM, 2007). Segundo estes autores, esta consolidação é feita à medida que há uma comunicação do pensamento matemático entre os intervenientes e esta é feita de forma coerente e clara e é feita uma análise e avaliação de estratégias usadas, com recurso à linguagem matemática para expressar ideias matemáticas com precisão.

A comunicação escrita é importante na consolidação do pensamento matemático dos alunos, uma vez que faz com que reflitam sobre o seu trabalho e, deste modo, possam "*clarificar as suas ideias acerca das noções desenvolvidas na aula*" (NCTM, 2007, p. 67). Também, no programa de matemática do ensino básico em vigor (Ponte *et al*., 2007) é referido que "os alunos devem ser capazes de comunicar as suas ideias e interpretar as ideias dos outros, organizando e clarificando o seu pensamento matemático"(Ponte *et al*., 2007,p. 5).Para que tal aconteça devem comunicar oralmente e por escrito, descrevendo, explicando e justificando as suas ideias, procedimentos e raciocínios, bem como os resultados e conclusões a que chegam. A comunicação matemática surge como uma capacidade transversal a toda a aprendizagem da matemática, em paralelo com a resolução de problemas e o raciocínio matemático (Ponte *et a*l., 2007). Neste documento estão contempladas estratégias de desenvolvimento destas capacidades e de criação de oportunidades de comunicação adequadas, nomeadamente, através de discussão na turma e em trabalhos de grupo e elaboração de relatórios sobre tarefas e pequenos textos sobre assuntos matemáticos. Para desenvolver a comunicação oral são favoráveis as situações de discussão ou trabalho em pequenos grupos e para desenvolver a comunicação escrita surge a necessidade de elaboração de relatórios escritos associados à realização de tarefas, de forma a "ajudar os alunos a consolidar o seu pensamento, uma vez que os obriga a refletir sobre o seu trabalho e a clarificar as suas ideias acerca das noções desenvolvidas na aula" (Ponte *et al*.,2007, p. 67).

Tarefas a trabalhar na sala de aula

As tarefas que são realizadas na sala de aula têm um papel fundamental no processo de ensino e aprendizagem, pois permitem não só o desenvolvimento das matérias lecionadas, mas também a aquisição de conhecimentos, a experimentação, exploração, reflexão e comunicação, sendo necessário que os alunos tenham oportunidade de participar em tarefas diversificadas e que seja estabelecido um ambiente de sala de aula onde existam interações professor-aluno e aluno-aluno (Christiansen & Walther, 1986). "São as tarefas e situações que dão oportunidade aos alunos de se envolverem na criação da sua reflexão, da sua própria matemática" (Bishop & Goffree, 1986, p. 9). Para estes autores, o ensino e aprendizagem da Matemática envolve atividade, comunicação e negociação. Aprender matemática fazendo e ensinar não é apenas a apresentação de conteúdos matemáticos, mas também a criação de tarefas diversificadas, a gestão das atividades coletivas da turma e orientações dadas em atividades em pequenos grupos ou em atividades individuais (Bishop & Goffree, 1986).

As tarefas podem ser operacionalizadas tendo em conta os seguintes aspetos: o contexto, a complexidade, o grau de abertura, a forma, a aparência e a origem e cada tarefa pode ser "interpretada sob a influência de vários fatores (e interpretada e executada sob a influência das atitudes e das conceções, quer dos alunos, quer do professor) e a atividade está condicionada pela atuação do professor" (Christiansen & Walther, 1986, p. 250).

A seleção de tarefas por parte do professor é um aspeto essencial para a fomentação da comunicação oral e escrita. Para Stein e Smith (1998) as tarefas podem ser de exigência de nível reduzido (memorização e procedimento sem conexões) ou de exigência de nível elevado (procedimentos com conexões e fazendo matemática). Segundo estes autores, as tarefas apresentam diferenças quando aparecem nos materiais curriculares, quando são apresentadas pelo professor (fase de apresentação) ou quando são realizadas pelos alunos (implementação), o que influencia o que os alunos realmente aprendem. Para Ponte (2005), as tarefas podem ser de quatro tipos: exercício; tarefa de exploração; resolução de problemas; e tarefa de investigação. Para este autor, os problemas e exercícios são tarefas fechadas, mas enquanto os problemas têm um certo grau de desafio, os exercícios têm um processo de resolução rápido e desafio reduzido. As tarefas de exploração e de investigação são, pelo contrário, mais abertas, embora as primeiras sejam menos desafiantes, podendo os alunos começar a trabalhar sem grande planeamento.

Das tarefas apresentadas, são principalmente as investigações matemáticas que promovem a experiência matemática dos alunos, uma vez que lhes possibilita vivenciar os processos característicos da matemática como a formulação de questões e conjeturas, teste e argumentação sobre as conjeturas (Santos, Brocardo, Pires & Rosendo, 2006) e também formular e resolver problemas, testar, generalizar, debater, rever ideias relacionadas com entidades matemáticas e justificar generalizações (Christiansen & Walther, 1986). Este tipo de tarefas promove maior envolvimento dos alunos, apresentando um desafio elevado e, tal como a resolução de problemas, permitem que as perguntas possam ser colocadas, tanto pelo professor, como pelos alunos (Martinho & Ponte, 2005). Há, no entanto, algumas diferenças entre a resolução de problemas e as tarefas de investigação. No primeiro caso, as questões já estão formuladas, enquanto no segundo caso a formulação de questões é o primeiro processo a ser utilizado (Ernest,1996, citado em Santos *et al*., 2006). Estes tipos de tarefas, segundo este autor, também diferem em relação aos seus objetivos, pois enquanto na resolução de problemas há a procura de uma solução (processo convergente), na investigação matemática o objetivo é a própria exploração (processo divergente).

Metodologia de trabalho

Para além da seleção de tarefas, outro aspeto fundamental para a fomentação da comunicação oral e escrita é a gestão dos momentos da aula e o incentivo dado pelo professor aos alunos para apresentarem e explicarem o que fizeram, e justificarem os resultados obtidos, durante a fase de discussão, para que o seu raciocínio possa ser validado (Serrazina *et al*., 2008; Stein, 2001). Quando se tratam de tarefas de investigação, consideram-se, em geral, três fases do seu desenvolvimento na sala de aula - a introdução da tarefa, o desenvolvimento do trabalho e a discussão final (Christiansen & Walter ,1986). Na fase de desenvolvimento do trabalho deve existir o confronto de ideias e o professor deve incentivar a argumentação e na fase de discussão deve incentivar a reflexão, para que haja confronto de resultados e processos (Santos *et al*., 2006?).

Tendo em conta a diversidade de tarefas propostas é necessário coordenar as estratégias utilizadas em sala de aula: trabalho individual, trabalho de grupo e trabalho coletivo (Bishop e Goffree, 1986; NCTM, 1989). Para Bishop & Goffree (1986, p. 20) “enquanto as atividades de grupo enfatizam e promovem a interdependência, a atividade individual requer trabalho individual”. O professor deve gerir as atividades coletivas da turma e orientar tanto as atividades individuais como as de grupo, fomentando neste segundo caso a discussão, de modo a que seja possível “articular estratégias para a solução e expor erros de compreensão” (Bishop e Goffree, 1986, p. 18). Para a resolução de problemas ou tarefas de investigação, que envolvem atividade de nível elevado, estes autores salientam a importância da sua realização em trabalho de grupo, referindo, no entanto, que as tarefas com procedimentos básicos podem ser realizadas individualmente, mas também podem ser realizadas em grupo em situações que envolvam algum trabalho prático, como por exemplo a recolha de dados estatísticos ou jogos.

No que diz respeito ao desenvolvimento da comunicação em Matemática, destaca-se o trabalho de grupo por ser um "fórum" onde os alunos têm a oportunidade de fazerem perguntas, discutirem ideias, cometem erros e corrigi-los, ouvir e criticar as ideias dos outros, sintetizando as ideias por escrito (NCTM, 1989, p.79;). O trabalho de grupo privilegia "a resolução de problemas, o desenvolvimento de modelos matemáticos, as atividades de exploração e descoberta, a discussão e a comunicação, a argumentação e a prova, e a construção de conceitos" Abrantes (1994, p.132).

Os grupos onde os alunos colaboram numa determinada tarefa devem ser heterogéneos, pois cada aluno ao observar os outros e compreender como é que aprenderam, consegue dar sentido a uma atividade inferior como a mecanização (Freudenthal,1978). Segundo este autor, a aprendizagem da Matemática acontece por níveis e através da observação e reflexão sobre os processos de níveis anteriores os alunos progridem. A utilização de grupos heterogéneos também é vantajosa porque os alunos do grupo podem compreender melhor do que o professor as dúvidas que os colegas apresentam por estarem na mesma situação, utilizarem uma linguagem semelhante e a ajuda ser imediata (Abrantes, 1994). Sobre a heterogeneidade dos grupos Dekker (1987,citada em Abrantes, 1994), refere que o "grupo de competência mista" é favorável ao crescimento do nível matemático dos alunos porque estes, ao refletirem sobre os métodos informais que utilizam, podem alcançar o método formal. Slavin (1990) faz referência ao equilíbrio que deve ser criado no grupo e como tal, propõe que os grupos tenham alunos de três níveis: bom, médio e fraco. Webb (1991) investigou sobre as interações dentro dos grupos considerando os níveis de aproveitamento "bom, médio e fraco" e concluiu que as situações em que ocorreu uma participação ativa da maioria dos alunos foram coincidentes com os grupos que tinham alunos de nível bom e médio ou de nível médio e fraco e o contrário aconteceu nos grupos homogéneos. Há, no entanto, uma limitação apresentada aos grupos heterogéneos, que é o fato de poderem ser evidenciadas diferenças de estatuto entre os alunos, ou seja, haver os alunos que “ajudam” e os que “são ajudados” (Good *et al*., 1992, citado em Abrantes, 1994).

Neste trabalho será privilegiado o trabalho de grupo, pois segundo Martinho & Ponte (2005, p.3) “a investigação mostra que as interações aluno-aluno numa aula de investigação , de trabalho de projecto ou de resolução de problemas em grupo, são potencialmente mais ricas do que numa aula de resolução de exercícios” Para além disso, “os alunos sentem-se mais confortáveis a falar em pequeno grupo do que em grande grupo (Lester, 1996), num “meio sem ameaças” (Buschman, 1995) onde se vão progressivamente apropriando da linguagem matemática”. A dimensão dos grupos é uma das caraterísticas que, segundo Abrantes (1994), é importante. O trabalho de pares pode ser uma forma de dar início ao trabalho de grupo se os alunos tiverem tido pouca experiência com esta metodologia, mas à medida que forem ganhando experiência poderão organizar-se em grupos de três ou quatro elementos (Robertson *et al*., 1990; Jonhson e Jonhson,1990, citados em Abrantes, 1994).Na gestão do trabalho de grupo, o professor precisa estimular a interação entre todos os membros do grupo e as dúvidas que lhe forem colocadas devem ser remetidas para o grupo (Abrantes, 1994).

Outro aspeto que também deve ser gerido é o tempo de realização da tarefa e a articulação entre o trabalho de grupo e a discussão na turma. Este trabalho coletivo pode surgir depois de um período de trabalho individual ou de grupo, depois dos alunos já terem escrito a resolução dos problemas ou relatórios, em que um aluno ou o porta-voz do grupo faz uma apresentação geral, explicando aos seus colegas de turma o seu processo de resolução (Bishop & Goffree, 1986; Abrantes, 1994). Em suma, quando há uma seleção de tarefas de caráter aberto e de desafio elevado, em que os alunos têm mais tempo para a sua realização, dá-se ênfase à comunicação, discussão e reflexão (Ponte, 2005; Bishop & Goffree, 1986; Abrantes, 1994).

Capítulo III
Comunicação Matemática

Comunicação

A palavra *comunicar* deriva do latim *communicare*, que tal como comungar, significa “pôr ou ter em comum; repartir, compartilhar; receber em comum, tomar a sua parte de" (Machado, 1995, vol. II, p. 197). Segundo Carvalho (1983), etimologicamente, *comunicar* está ligado ao adjetivo *comum* e ao substantivo *comunidade*. Neste sentido, comunicar representa tornar algo comum, pôr em comum ou ainda estabelecer comunidade. Deste modo, a comunicação é um processo em que a linguagem, o discurso e as interações tornam comuns determinadas ideias e pode ocorrer oralmente ou por escrito (Menezes,2000; 2004).

O papel da comunicação na aprendizagem é visto de forma diferente por diversas perspetivas teóricas. Segundo Sierpinska (1998), enquanto a perspetiva construtivista e a perspetiva sociocultural estudam o desenvolvimento e o trabalho do indivíduo – na tradição da Psicologia e da Epistemologia Genética – a perspetiva interacionista toma como objeto de estudo as interações. Do ponto de vista construtivista, a ênfase é colocada na construção individual do conhecimento e a comunicação serve, essencialmente para expressar os pensamentos de cada um (Glaserfeld, 1996a). A partir da troca linguística, para haver entendimento sobre o que alguém diz ou escreve é necessário existir uma construção conceptual compatível. Sobre esta compatibilidade Glaserfeld (1996a, p. 239) refere *que* "…ela só se manifesta quando, subsequentemente, o falante nada diz ou faz que contrarie as expectativas que o ouvinte infere da sua intervenção". Sierpinska (1998, pp. 33-34) refere que "a noção de comunicação é um problema para o construtivismo porque é associada à transmissão de pensamento", onde há apenas compatibilidade entre "coordenação intraindividual das ações e a coordenação interindividual". Segundo este autor, do ponto de vista sociocultural, a comunicação serve a interiorização de conhecimento no seio de uma dada cultura, como meio de transmissão cultural, contrariando a perspetiva construtivista que associa a comunicação à transmissão de pensamento, fazendo referência que "… é normal ter os estudantes a estudar a definição de um conceito como ponto de partida para a aquisição desse conceito; espera-se que analisem a sua estrutura lógica; que encontrem exemplos e contraexemplos do conceito; que enquadrem o conceito na estrutura da teoria" (Sierpinska,1998, p. 48).

De outro ponto de vista, ou seja, o integracionista, Sierpinska (1998) entende que há uma aproximação e integração das perspetivas psicológicas e sociológicas sem dar preferência a nenhuma delas. Mead foi um dos percursores do interacionismo simbólico. Publicou relativamente pouco, tendo sido sobretudo alguns dos seus alunos, dos quais se destaca Blumer (1998, p. 2), que divulgou as suas principais ideias:

> i) O ser humano orienta os seus atos para as "coisas" em função do que elas significam para si; (...)
> ii) O significado de estas coisas advém de, ou emerge como consequência da interação social que cada um mantém com o seu próximo (fonte do significado);
> iii) Os significados manipulam-se e modificam-se mediante um processo interpretativo promovido pela pessoa ao confrontar-se com as coisas.

Charon (1995) também se pronunciou sobre o interacionismo simbólico realçando quatro ideias-chave:

i) A dinâmica das atividades sociais que se estabelecem são entre as pessoas e não nos comportamentos individuais ou na estrutura social.

ii) A ação humana não é somente derivada da interação social, mas também da *interação dentro de si mesmo (interaction within individual)*, ou seja, a forma como cada um define a situação em que está envolvido.

iii) A ação é influenciada pela interação social na situação presente e o passado entra quando o recordamos na situação em que estamos envolvidos.

iv) O ser humano é ativo, influencia e é influenciado pelos outros de uma forma dinâmica, não sendo apenas o organismo que reage ao ambiente.

Comunicação matemática

A comunicação matemática é uma capacidade transversal a todo o trabalho desenvolvido na disciplina de Matemática que pode surgir tanto oralmente como por escrito em situações que propiciem ao aluno "expressar as suas ideias, mas também interpretar e compreender as ideias apresentadas e de participar de forma construtiva em discussões sobre ideias, processos e resultados matemáticos"(PMEM,2007,p.8). Esta capacidade transversal envolve os processos de interpretação, representação, expressão e discussão.

Em sala de aula, a comunicação pode ser vista como um objetivo curricular, ou seja, aprender a comunicar, ou como uma metodologia de ensino que permite comunicar para aprender (Lampert & Cobb, 2003). Para estes autores, estas duas vertentes da comunicação estão interligadas e não podem ser vistas isoladamente. Quanto à comunicação matemática, esta pode ser vista de diferentes perspetivas, de acordo com o enquadramento teórico: teoria matemática da comunicação; enquadramento semiótico; e comunicação como interação social. Na primeira perspetiva, defendida por Shannon (1948), a comunicação é encarada como um ato voluntário, sendo um processo de transmissão de informações entre um emissor e um recetor, cuja eficácia depende da eliminação do ruído que interfere com essa transmissão. A sua eficácia também depende da capacidade do professor em controlar o modo como os alunos estão a receber a informação (Sfez, 1991). Neste caso, para que a mensagem seja compreensível, tanto o professor como os alunos partilham um mesmo código (Bitti & Zani, 1997). Para estes autores, a comunicação é um processo dinâmico de codificação e descodificação da mensagem.

Na perspetiva semiótica, a comunicação matemática é vista como um processo de aquisição de representações através de signos, em que a interação da mensagem com os recetores produz significados (Fiske, 2005). O conhecimento matemático é adquirido por um processo de compreensão e *transformação* de várias representações semióticas utilizadas em matemática (Duval, 2003).

Na perspetiva de comunicação como interação social, os intervenientes partilham a sua compreensão sobre um assunto, influenciando-se mutuamente na construção de significados (Bauersfeld, 1994; Yackel, 1995; Sierpinska, 1998; Godino e Llinares, 2000; Ponte e Serrazina, 2000). Nesta perspetiva, que é igualmente assumida neste estudo, a cultura de aula é construída interactivamente por professor e alunos, através da comunicação, a negociação e partilha de significados (Ponte & Serrazina, 2000). Assim, a aprendizagem da Matemática é vista como uma participação ativa numa cultura, tendo como processo de adaptação a comunicação e a linguagem é utilizada para negociação e partilha de significados. Para Ponte e Serrazina (2000, p. 59) a comunicação é um processo matemático transversal que permite "estender o nosso conhecimento matemático, considerando e interagindo com as ideias dos outros". Estas ideias matemáticas que são partilhadas são simultaneamente "modificadas, consolidadas e aprofundadas por cada indivíduo". Por sua vez, o professor tem de organizar um processo interativo e reflexivo, implicando os alunos numa sequência de atividades, e de estabelecer e manter assim uma cultura de aula, mais do que transmitir conhecimentos e normas previamente codificadas (Godino e Llinares, 2000). Assim, o significado desenvolve-se por um processo de interação e interpretação entre os membros de uma certa cultura. Há três princípios de aplicação do interacionismo na sala de aula de matemática:(i) a cultura da aula é constituída de forma interativa pelo professor e pelos alunos; (ii) as convenções (conteúdo e organização da aula) emergem interactivamente; (iii) o processo de comunicação apoia-se na negociação e partilha de significados.

A comunicação, que se tem mostrado ser fundamental para a compreensão do processo didático, pode ser vista de duas formas diferentes: “(i) a comunicação como organização e transmissão de informações; ou (ii) a comunicação como um processo de interação social”(Ponte et al, 2007, p.3). Na primeira perspetiva destaca-se a preocupação do professor em permitir que as mensagens emitidas aos alunos sejam compreensíveis, utilizando redundâncias e reforço do conteúdo das mensagens, em que há uma aplicação de regras a uma situação particular e o professor é o único que dá explicações. Neste caso, para autores como Cobb, Yackel & McNeal (1992) a matemática é categorizada em matemática escolar . A linguagem simbólica é valorizada e a aprendizagem da Matemática é vista como a “aquisição de uma organização complexa de símbolos, signos e representações matemáticas” (Ponte et al, 2007, p.4). Na segunda perspetiva, em que há interação social entre o professor e os alunos, existem processos de negociação de significados, que são possibilitados pela existência de um conjunto de tarefas diversificadas e não rotineiras que permitem diferentes estratégias de resolução e partilha de ideias, em que é dada importância aos processos de fazer sentido e aos processos sociais existentes na sala de aula. Neste caso, para Cobb, Yackel & McNeal(1992) a matemática é categorizada em matemática inquiridora. A genuína partilha de significados matemáticos é feita quando os intervenientes desejam ouvir e identificar-se com outros, o que deve ser encorajado pelo professor ao permitir que os alunos se envolvam em variadas tarefas que lhes permitam fazer *brainstorming*, participar numa discussão, resolver problemas, explicar a um colega, defender o seu argumento, convencer os outros de uma afirmação, rejeitar proposições falsas, entrevistar um especialista, colocar questões, apresentar relatórios e distribuir tarefas (Bishop & Goffree, 1986). Em relação à comunicação na sala de aula, há dois processos que se destacam, ou seja, *explicar*, em que se trata de compreender e usar “um processo sem fim de representar as conexões, as relações entre a ideia que se está a explicar e outras ideias” (Bishop & Goffree, 1986, p. 23); e *interpretar* as representações de ideias matemáticas.

Também Bauersfeld, Krummmheur e Voigt (1988) colocam a ênfase tanto nos processos individuais de dotar sentido como nos processos sociais, já que o desenvolvimento da compreensão pessoal dos indivíduos ocorre na participação da negociação das normas da aula. Estas normas sociais que se estabelecem em sala de aula são um conjunto de ações que regulam a interação social (Cobb, Wood, Yackel & McNeal, 1992). As normas sociais são normas que ocorrem na sala de aula e não ocorrem exclusivamente nas aulas de matemática (McClain & Cobb, 2001). Segundo estes autores as normas podem ser as seguintes:

1- Explicar e justificar as soluções
2- Ouvir e tentar fazer sentido relativamente às soluções dos outros
3- Indicar as suas dúvidas
4- Colocar questões clarificadoras acerca das dúvidas
5- Explicar a rejeição das interpretações que consideram inválidas.

Contudo, na microcultura da aula de matemática há aspetos intrínsecos que não são predeterminados, sendo permanentemente regenerados e modificados pelos alunos e professor através das suas interações: as normas sociomatemáticas (Yackel & Cobb, 1996). Estas normas são estabelecidas através das discussões que são específicas da atividade matemática e Yackel e Cobb (1996) dão como por exemplo: as explicações e justificações matematicamente aceitáveis, a diferença matemática, a solução sofisticada e eficaz. As explicações e justificações aceitáveis são construídas e partilhadas tanto pelo professor como pelos alunos em situações que permitam dar sentido a uma explicação ou fazer julgamentos de como outras crianças terão dado sentido a essa explicação. Em relação à norma sociomatemática de diferença matemática Yackel e Cobb (1996) referem que tem como função regular a participação na discussão e que se trata de uma atividade cognitiva de alto nível, uma vez que a solução é um objeto da própria reflexão. Quanto à norma sociomatemática de solução sofisticada e eficaz, é referido por estes autores, que tem um papel importante no progresso do discurso matemático e sofisticação do pensamento individual dos alunos à medida que constituem interactivamente com o professor uma compreensão partilhada do que é matematicamente valorizado.

Um dos papéis importantes da comunicação na aprendizagem da matemática é permitir que os alunos pensem sobre o seu pensamento e também sobre as suas dificuldades na utilização da matemática formal (Lee, 2006). Quando se aprende a expressar ideias matemáticas, quer oralmente quer por escrito, desenvolve-se a literacia matemática. A comunicação deve ser posta em prática, tanto por escrito como oralmente, de modo a permitir aos alunos o desenvolvimento da aptidão para discutir com os outros e comunicar ideias matemáticas através do uso de uma linguagem escrita e oral, para que possam "entender a estrutura de um problema" e apresentar melhores aprendizagens em Matemática (Abrantes, Serrazina e Oliveira, 1999, p. 41). Quando os alunos têm um certo espaço de comunicação, têm oportunidade de aprendizagem efetiva da matemática pois quando utilizam a linguagem oral e escrita podem "refletir sobre a sua compreensão da matemática, ajudando-os a fazer conexões e a clarificar os conceitos matemáticos" (Ponte et al, 2007, p.45).

Outra das funções da comunicação matemática é a análise e avaliação das estratégias e do pensamento matemático usado por outros porque deste modo aprendem a "tornar-se críticos no contexto matemático" (NCTM, 2007,p. 69). Para estes autores, os alunos devem "questionar e demonstrar o pensamento dos colegas, de modo a clarificarem ideias ainda não totalmente desenvolvidas" e "analisar os métodos e ideias dos outros, de forma a determinar os seus pontos fortes e limitações" (NCTM, 2007, p. 69).

Em Matemática, a aprendizagem exige comunicação para que as informações, conceitos e representações sejam veiculadas entre as pessoas e haja a construção de uma relação entre a linguagem informal e a linguagem simbólica (Smole & Diniz, 2001). A comunicação é um meio que dá oportunidade aos alunos de organizar e explorar os seus pensamentos, funcionando como um modo de desenvolvimento da compreensão de um conceito. A reflexão sobre um determinado conceito é determinante para a sua melhor compreensão, pois segundo Vygotsky (2003, p.190) a relação entre o pensamento e a palavra "…é um processo vivo" em que a linguagem permite a expressão de ideias oralmente ou por escrito e também funciona como um meio auxiliar do pensamento, pois "…o pensamento nasce através da palavra". Para que possam ser criados contextos pedagógicos que propiciem a comunicação matemática é necessário que sejam utilizadas as diferentes formas de linguagem (Ponte & Serrazina, 2000). Também Vygotsky (2003) refere a necessidade da expressão oral e escrita para expor um pensamento ou raciocínio porque, no intercâmbio social, a linguagem influencia o pensamento quando se dá a interiorização do diálogo exterior. Segundo este autor, os alunos utilizam dois tipos de linguagem: intrapessoal, que permite a expressão ou projeção de uma solução; e interpessoal, que permite a partilha de ideias e desenvolvimento.

A linguagem na aula de matemática

O ensino e aprendizagem são “eminentemente atos comunicativos” que se podem estabelecer através da oralidade e da escrita (Menezes, 2000b, p. 258).

Para alguns autores, o conceito de linguagem surge associado ao conceito de comunicação, que na aula de matemática pode assumir uma diversidade de formas. Para Pirie (1998, p. 8) “a linguagem, em sentido amplo, é o mecanismo através do qual os professores e os alunos procuram em conjunto expressar a sua compreensão matemática” utilizando: (i) Linguagem ordinária (que os alunos usam no dia-a-dia, através da sua língua materna); (ii) Linguagem verbal matemática (comunicação oral e escrita, que recorre a palavras, que os alunos aprendem através da escolarização); (iii) Linguagem simbólica (meio objetivo e não ambíguo de comunicar, imposto externamente aos alunos pelo professor); (iv) Representações visuais (comunicação de ideias através de gráficos, diagramas, esquemas ou outros elementos visuais); (v) Compreensões não ditas, mas partilhadas (conversa dos alunos sobre o que lhes é familiar e partilha de significados); e (vi) Linguagem quási-matemática (comunicação por entendimentos muito próprios dos alunos, recorrendo, no entanto, a formulações pouco ortodoxas).

Pimm (1991, 1994a) também considera que a linguagem pode ocorrer de diferentes modos: (i) Linguagem natural (de carácter informal); e (ii) Linguagem formal (comunicação oral e escrita, que recorre a palavras da língua materna e símbolos convencionais de Matemática, que os alunos aprendem através da escolarização). Segundo o autor, pode chegar-se à linguagem formal escrita da Matemática através da linguagem oral mais formal ou da linguagem escrita informal. “O ensino e a aprendizagem da Matemática envolve as atividades de ler e escrever, ouvir e discutir” (Pimm, 1994a, p. 160). A construção de significados matemáticos ocorre sucessivamente à medida que os alunos falam ou escrevem sobre a Matemática, sendo regulados pelo professor, pois desenvolvem a sua capacidade de comunicação matemática usando a linguagem para “expressar os seus pensamentos, mas também para partilhar significados e para compreender os argumentos dos outros alunos e do professor” (Ponte *et al*., 2007, p. 46).

A escrita tem uma relação com a Matemática, pelo facto de permitir a expressão, utilizando os seus próprios símbolos matemáticos, mas a sua introdução precoce poderá ser uma dificuldade acrescida para os alunos na sua compreensão (Menezes, 2000a, 2000c). Deve ser encorajada a comunicação escrita para além da comunicação oral, pois a escrita dos alunos do 3.º ao 5.ºano deve tornar-se mais elaborada, sendo um processo "semelhante ao de aprender qualquer outro tipo de escrita" (NCTM, 2007, p. 68).No processo de justificação de procedimentos ou resultados podem ser utilizados dados empíricos ou exemplos, em que os alunos podem inicialmente fazê-lo através das suas palavras e gradualmente perceber a necessidade de utilização de termos matemáticos convencionais.

Representações

Na aprendizagem da matemática a reflexão está relacionada com a comunicação e vice-versa. Esta aprendizagem é realizada por interações que ocorrem na sala de aula e que se estabelecem através da linguagem. Neste processo as representações são ferramentas essenciais pois permitem aos alunos aceder às ideias e utilizá-las, de forma a aumentar a sua capacidade de pensamento matemático (NCTM, 2007). As representações podem ser entendidas como um processo ou como um resultado, obtido externa ou internamente. Esta perspetiva é igualmente defendida por Goldin e Kaput (1994) que salientam que as representações não ocorrem de forma isolada e pertencem a sistemas altamente estruturados, seja pessoal e idiossincrático ou culturais e convencionais. Kaput (1987) chama as representações de "esquemas de símbolos" e para Goldin (1987; 2003) uma representação é um conjunto de sinais, caracteres, ícones ou objetos que designam ou substituem algo. Também Ponte e Serrazina (2000, p. 2) entendem que "representar, … inclui compreender e usar símbolos, convenções, gráficos". Salientam, tal como os autores anteriormente citados, que as representações se aplicam, tanto a processos, como a produtos, que, por sua vez, podem ser observáveis ou podem ocorrer internamente na mente das pessoas.

As representações também podem ser vistas como uma tradução da experiência num modelo do mundo (Bruner, 1999). Para o autor, o crescimento intelectual caracteriza-se pela crescente independência da reação relativamente à natureza imediata do estímulo e depende da interiorização de acontecimentos num "sistema de armazenamento" que corresponde ao meio. O desenvolvimento intelectual implica uma capacidade crescente de dizer a si próprio e aos outros o que se fez ou o que se vai fazer e, segundo Bruner (1999, p. 27), a representação é vista como a "forma como a criança se liberta dos estímulos presentes e conserva a experiência passada num modelo e as regras que regem o armazenamento e a reobtenção deste modelo". Segundo Duval (2003), que tem por base a teoria da representação semiótica, as representações não são internas nem externas e funcionam como modelos para aquisição de conhecimento, havendo um intercâmbio comunicativo entre o sujeito e a atividade cognitiva do pensamento.

Podem existir diferentes formas de registo de representação de um objeto e é de fazer notar que a atividade matemática está dependente de representações semióticas, pois os objetos matemáticos que, não sendo acessíveis pela perceção, podem ser representados (Duval, 2003). Em Machado (2008), as representações defendidas por Duval foram sistematizadas de acordo com o modo fenomenológico de produção dos alunos:

MODO FENOMENOLÓGICO DE PRODUÇÃO

SISTEMA DE PRODUÇÃO		MENTAL (interna)	MATERIAL (externa)	
			ORAL	VISUAL (suporte de papel ou tela de computador)
		produção para si próprio	produção para os outros	produção para si próprio ou para os outros
	SEMIÓTICO (produção intencional)	discurso interior OBJETIVAÇÃO e funções de tratamento	interações verbais funções de COMUNICAÇÃO	escrita, desenho funções de TRATAMENTO de comunicação e de objetivação
	NATURAL (produção automática)	memória visual ou icônica função de objetivação		

Figura 1- Representações apresentadas por Duval (2003)

As representações, segundo Duval (2003), podem ser feitas de quatro formas: através da língua natural, das escritas algébricas e formais, das figuras geométricas e de representações gráficas. No sistema de escrita e de representações gráficas - registos multifuncionais- o seu tratamento é feito principalmente por algoritmos, o que não acontece quando são utilizadas as figuras geométricas ou a língua natural - registos monofuncionais.

Para Bishop e Goffree (1986) e Ponte e Serrazina (2000) também existem quatro tipos de representação: (i) a linguagem oral e escrita; (ii) as representações simbólicas (algarismos, sinais operatórios,…); (iii) as representações icónicas (figuras, gráficos, …) e (iv) as representações ativas (objetos usados como mediadores de aprendizagem, como por exemplo materiais manipuláveis). Estes tipos de representação diferem dos apresentados por Duval apenas em relação aos materiais manipuláveis, que não são referenciados pelo autor. No entanto, à semelhança de Ponte e Serrazina (2000) também Bruner (1999) assume que as representações incluem os materiais manipuláveis e que estas podem surgir de três formas: (i) activa – feita pela ação, com o objetivo de alcançar um certo resultado; (ii) icónica – representação interna que depende da organização visual ou outra organização sensória e do recurso a imagens resumo representativas de porções do meio; (iii) simbólica – por palavras ou linguagem, em que há tradução da experiência para a linguagem. Neste caso, a linguagem torna-se um "veículo" do pensamento através de um conjunto de preposições simbólicas ou lógicas.

A variedade de representações usadas pelos alunos auxilia o professor no seu conhecimento sobre as formas como pensam sobre uma relação ou conceito (Ponte e Serrazina, 2000).Segundo Goldin e Kaput (1994), há um sistema interno que é composto por representações mentais e um sistema externo que é composto por representações físicas acessíveis à observação direta (discurso, palavras escritas, fórmulas manipuláveis no concreto). O sistema de representação interno inclui a linguagem natural, a construção de imagens visuais e espaciais, as representações tácteis e cinestésicas e também as características pessoais. O sistema de representação externo inclui: linguagens naturais, sistemas matemáticos gráficos, ambientes de aprendizagem estruturados (tecnologias ou materiais manipuláveis) e o sistema educativo (Goldin, 2003).

Depois de terem sido apresentados vários tipos de representações pelos autores referidos anteriormente, citando Bruner (1999, p. 38) "qualquer notação é importante, seja sob a forma de modelos, imagens, palavras ou símbolos matemáticos" e funciona como um veículo de autoconsciência do desenvolvimento intelectual. Um dos processos que está envolvido na transformação de representações é a *interpretação* (Bishop & Goffree, 1986). Para estes autores, os alunos devem utilizar vários tipos de representação para que se familiarizem e as aceitem e durante as tarefas e discussão devem ter a oportunidade de perceber os processos de transformação das representações, tendo consciência da sua natureza e do seu valor em matemática, para que possam escolher qual delas é preferível em relação a outra.

Quando se fala em representações semióticas, de acordo com Duval (1999) estas podem ter as seguintes funções: (i) comunicação, pois requer um código comum; (ii) tratamento, quando há a transformação de uma representação na outra; (iii) objetivação, quando há a tomada de consciência do que ainda não foi feito; e (iv) identificação, ou seja a organização das informações da memória.

Sobre as relações entre os diferentes tipos de representações, tendo em conta a teoria das representações semióticas, Duval (2003) refere que há dois tipos de transformações de representações semióticas: (i) tratamento, que não implica mudança de sistema de escrita, dando como exemplo a resolução de um cálculo; e (ii) conversão, em que há mudança de sistema mantendo como referência o mesmo objeto, dando como exemplo a representação fracionária e decimal de um número racional. No primeiro caso, corresponde a um procedimento de justificação e no segundo caso corresponde a uma coordenação de registos mobilizados, de forma a aumentar o poder do tratamento. Segundo o autor, esta última ação é fundamental à compreensão, salientando que converter não é simplesmente traduzir, pois existem várias variáveis cognitivas, que são específicas do funcionamento de cada representação e de acordo com os significados que são considerados. Para além disso, é necessário dispor pelo menos de dois registos de representação diferentes para que não se confunda um objeto com a sua representação. É importante que existam relações entre as representações, como por exemplo a tabela, que é uma das representações gráficas usadas pelos alunos que pode ser utilizada para organizar outras representações, tendo como característica o ser finita, ao contrário dos gráficos cartesianos, que são potencialmente infinitos (Duval,2002). Para o autor, quando os alunos fazem uma consulta pontual à tabela e encontram rapidamente a informação desejada, a função que está a ser utilizada é a identificação, ou seja a organização das informações da memória, que implica pouco esforço cognitivo. Porém, as tabelas também podem permitir o aparecimento de novos dados e inferências sobre relações de elementos ainda não conhecidos. Dependendo do tipo de tarefa, o recurso a tabelas implica um maior esforço cognitivo em procedimentos como comparações entre linhas ou colunas, permutas, ou operações entre dados.

As relações entre os diferentes tipos de representações são abordadas por outros autores. Por exemplo, Goldin e Kaput (1994) referem que as interações entre as representações internas e externas podem ocorrer simultaneamente, pois as representações internas não são diretamente observáveis e os professores apenas inferem sobre as representações mentais a partir do que os alunos dizem ou do seu comportamento externo. Para que a aprendizagem tenha significado, é necessário desenvolver e relacionar estas representações internas entre si. Embora a introspeção seja feita apenas pelo aluno, as descrições que resultam da introspeção são visíveis através do comportamento verbal e gestual, ou seja, através de representações externas, que são configurações observáveis (como palavras, gráficos, figuras, ou equações), que por sua vez também dependem da interpretação que os alunos fazem das representações internas. Contudo, o sistema interno não deve ser interpretado como uma cópia do sistema externo.

A utilidade de uma representação está dependente do grau de flexibilidade ou versatilidade do que pode representar (Goldin & Kaput, 1994). Salientam também a importância da dupla interação entre as representações interna e externa, dando como exemplo um indivíduo que representa algo exteriormente, tendo por base atos decorrentes de estruturas internas como a escrita, fala, ou manipulação de objetos concretos. Pode também ocorrer o contrário e haver uma representação interna a partir de um sistema de notação externo, dando como exemplo a leitura e interpretação de palavras, frases, equações e gráficos.

Em relação às consequências das representações para a aprendizagem da matemática, Ponte e Serrazina (2000) defendem que estas têm um papel importante. Segundo estes autores, há vantagem para as aprendizagens dos alunos em Matemática com o uso de representações próprias antes do uso das representações convencionais, pois, apesar de serem habitualmente pouco precisas, apoiam a compreensão e resolução de problemas e funcionam como um ponto de partida para outras representações, pois os professores podem fazer ligações com as representações usuais na Matemática. Marques (2008, pp. 26-27) corrobora esta posição ao afirmar que "O uso de representações próprias dos alunos é um meio de atingir a compreensão das representações convencionais que constituem as formas universalmente formalizadas".

As representações ajudam igualmente na comunicação de pensamentos e ideias aos outros. Para Bruner (1999, p. 72) a eficácia das representações depende da sua "…capacidade de, nas mãos de um aluno, ligar assuntos que, à superfície, parecem bastante separados". Após vários estudos experimentais, Bruner (1999, p. 90) chegou à conclusão que “uma criança para aprender matemática necessitava provavelmente de ter não apenas um sólido sentido de abstração subjacente àquilo que estava a trabalhar, como também uma boa provisão de imagens visuais para a materializar”. Segundo este autor, também as informações corretivas que são facultadas devem ter em conta se a aprendizagem ou a resolução de problemas se está a processar numa modalidade ativa, icónica ou simbólica, para que não exceda as capacidades de processamento de informação do aluno. No memorando resultante da primeira sessão de trabalho intensivo sobre avaliação, Bruner sugere que para além da informação corretiva, também haja pistas sobre como prosseguir.

Segundo NCTM (2007), devem ser criadas oportunidades aos alunos para usarem as suas próprias representações, mesmo que não sejam as convencionais, pois permitem aos alunos a compreensão das relações matemáticas, a comunicação de ideias, identificação de conexões e aplicação da matemática a problemas realistas. As representações idiossincráticas criadas pelos alunos ajudam à compreensão e resolução de problemas, na medida em que permite a organização do raciocínio e a tornar as ideias mais concretas, apelando à reflexão. Nas recomendações feitas salientam que os alunos durante toda a escolaridade devem ter oportunidade de: (i) criar e usar representações para organizar, registar e comunicar ideias matemáticas; (ii) selecionar, aplicar e traduzir representações matemáticas para resolver problemas e (iii) usar as representações para modelar e interpretar fenómenos físicos, sociais e matemáticos.

É importante permitir aos alunos que “escrevam através das próprias palavras e dos seus próprios símbolos”(Fonseca, 2000, p.34), de forma a elaborar um relatório escrito e apresentar aos outros o trabalho que foi feito, devendo ser encorajados a utilizar gráficos, tabelas, modelos ou diagramas. Na fase de reflexão sobre o trabalho realizado podem surgir novas conjeturas, pois ao produzir o relatório escrito sobre uma tarefa “o aluno terá de pensar no modo de organizar o seu raciocínio, decidir o que comunicar a quem vai ler o relatório e refletir sobre a forma como as ideias estão relacionadas” (Fonseca, 2000, p. 34).

Processos matemáticos

Há processos que são úteis a nível geral, não só para a matemática, como por exemplo: i) comunicação - explicar, falar, concordar, questionar; ii) raciocínio - recolher, clarificar, analisar, compreender; iii) registo - desenhar, escrever, listar, traçar gráficos; iv) recolher, classificar, ordenar, mudar (Frobisher 1994) e que podem estar relacionados com os processos específicos da matemática que devem ser gradualmente utilizados pelos alunos. Para além disso, em situações que envolvam a resolução de problemas ou a investigação há ligações entre os processos específicos da matemática que Frobisher (1994, p.163) sistematizou num esquema:

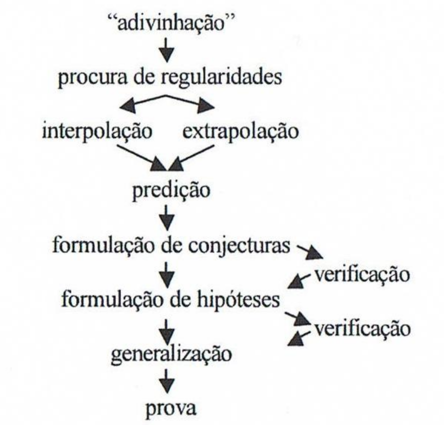


Figura 2 – Processos matemáticos (Frobisher, 1994)

Contudo, para Mason, Burton e Stacey (1982) os processos matemáticos que estão na base do pensamento matemático são: i) especialização (trabalhar com exemplos particulares); ii) generalização; iii) formulação de conjeturas; iv) justificação. A especialização é uma forma de se obterem evidências que permitam fazer uma generalização que, por sua vez, levará à formulação de uma conjetura, que será testada novamente com recurso a exemplos para que possa ser validada.

Para Pirie (1987), as tarefas de investigação desenvolvem as capacidades de pensamento matemático através dos seguintes processos matemáticos:

1) Formulação de conjeturas
2) Generalização
3) Procura de regularidades
4) Verificação
5) Prova
6) Especialização (trabalhar com exemplos particulares)
7) Registo de observações
8) Relato oral
9) Reflexão

10) Predição

11) Seleção de estratégias

12) Organização

13) Elaboração de um relatório

Durante a realização de uma tarefa, é possível distinguirem-se três fases: (i) arranque; (ii) envolvimento na tarefa; (iii) reflexão (Pirie, 1987). Na primeira fase, ocorre a escolha de uma estratégia para dar início à tarefa (processo de tentativa e erro, organização sistemática, manipulação de materiais, representação através de diagramas, tabelas ou desenhos). A fase de envolvimento na tarefa inclui quatro subfases - exploração, descoberta, confirmação e comunicação - onde o registo é essencial. Na exploração, os alunos pegam em exemplos e o registo escrito é uma forma de ajudar o aluno a não se esquecer do que já realizou; na subfase de descoberta, os processos utilizados são a procura de regularidades ou formulação de conjeturas, sendo o registo escrito importante para a organização das estratégias escolhidas e também para a descoberta de novas regularidades; na subfase de confirmação, os processos utilizados são a verificação, justificação e especialização, onde os registos permitem que as conjeturas sejam submetidas a novas verificações; e na fase de comunicação que acontece sempre em todos os relatos orais e escritos. A fase de reflexão pode ser um momento favorável à realização do relatório escrito.

Segundo o NCTM (2007, p. 66) a comunicação matemática é vista como “uma forma de partilhar ideias e de clarificar a compreensão matemática”. Faz uso dos seguintes processos: (i) apresentação do seu método de resolução; (ii) verificação se é aceitável como evidência matemática; (iii) elaboração de argumentos matemáticos; (iv) justificação de procedimentos e resultados com recurso a representações; v) formulação de questões. É importante que os alunos saibam ouvir, questionar e interpretar as ideias dos outros, o que os poderá ajudar a melhorar a forma como comunicam o seu pensamento matemático aos colegas, professores e outros, de modo a serem coerentes e claros (NCTM, 2007). O processo de comunicação e reflexão estão relacionados com a aprendizagem da matemática e a vertente escrita da comunicação é importante para a consolidação do pensamento, pois os alunos refletem sobre o seu trabalho e clarificam ideias (NCTM, 2007; Ponte *et al.*, 2007).

Quando se trata de tarefas de investigação, a justificação das conjeturas é um processo importante, para que os alunos possam alcançar progressivamente graus de generalização e abstração (Ponte *et* al., 1998). Também a discussão é uma fase importante para que possa haver confronto de estratégias, hipóteses ou justificações construídas pelos alunos, quer individualmente, quer em grupo, de modo a que seja desenvolvido nos alunos a capacidade de comunicarem matematicamente e argumentarem (Ponte *et* al., 1998). Os processos matemáticos utilizados pelos alunos nas tarefas de investigação não são sempre os mesmos nem utilizados da mesma forma, pois o processo que surge com maior frequência é a formulação de conjeturas, tendo maior presença nas tarefas em que os alunos recorreram a exemplos particulares, existindo uma forte relação entre os processos de especialização e formulação de conjeturas (Fonseca,2000).

Capítulo IV

Regulação das aprendizagens em Matemática

Neste capítulo começo por apresentar uma breve noção geral da avaliação, tendo em conta a sua evolução ao longo do tempo no que diz respeito ao seu significado. Também apresento algumas características da avaliação reguladora e faço referência a alguns dos processos de regulação que podem ser utilizados e diferentes estratégias potenciadoras da regulação das aprendizagens, nomeadamente a abordagem positiva do erro, o questionamento oral, o feedback escrito e o recurso de instrumentos diversificados de avaliação.

Avaliação das aprendizagens

O termo avaliação tem sido utilizado com vários sentidos em diferentes contextos e em função das dimensões histórica, científica, social e política em que se aplica. Segundo Guba e Lincoln (1989), ao longo do século XX, as conceptualizações de avaliação têm vindo a apresentar-se cada vez mais complexas: Avaliação como Medida; Avaliação como Descrição; Avaliação como Julgamento e Avaliação como Construção e Negociação, e são também referidas em Pinto & Santos (2006). Na primeira metade do século XX a avaliação é considerada uma medida e dá-se valor aos instrumentos de medição e aos produtos finais de aprendizagem (como por exemplo, exames ou provas finais externas) porque ensinar é encarado como uma transmissão de conhecimento e aprender é reproduzir esse conhecimento (Pinto & Santos, 2006). Neste momento atribui-se ao aluno um papel passivo e a avaliação tem neste caso uma função selecionadora, orientadora e certificadora.

No segundo caso, que ocorre nas décadas de 50 e 60, a avaliação é referida como uma congruência que incide nos produtos finais de aprendizagem e nos processos. Há um modelo pedagógico centrado no formar, em que se privilegia o "eixo professor/aluno, dando ao saber o estatuto de passivo" (Pinto & Santos, 2006, p. 22). Apesar de continuar a ter a função de selecionar, orientar e certificar, passa também a ter uma função reguladora, pois a avaliação formativa começa a ser encarada como uma comparação do desempenho dos alunos com os objetivos definidos. (Leal, 1992, citado em Pinto & Santos, 2006). È este paradigma que Guba e Lincoln (1989) designam de avaliação como descrição. Nele, o erro é encarado como uma sinalização sobre o funcionamento pedagógico.

Em meados da década de 70, já num paradigma em que a avaliação, segundo os mesmos autores, é vista como um julgamento de especialistas, tem-se em conta as tomadas de decisão, sendo no entanto o professor o principal agente de regulação (Pinto & Santos, 2006). Neste caso, o erro é encarado como um dado que pode revelar ao professor pistas sobre as representações ou as estratégias elaboradas pelos alunos.

Mais recentemente, na década de 90, segundo Pinto & Santos (2006), a avaliação é vista como uma interação social complexa, ou seja, um processo socialmente construído, cuja função central é a regulação do ensino e da aprendizagem, com destaque para o aluno que surge como principal agente regulador da sua própria aprendizagem, pois ensinar é gerir e orientar e aprender é estabelecer relações e dar-lhe significado e em situações de erro, quando este é reconhecido, compreendido e ultrapassado pode funcionar como um instrumento útil para a sua aprendizagem. Há um jogo de expectativas entre o que o professor espera do aluno e o que o aluno produz em função da forma como interpreta os pedidos do professor. A avaliação passa então a ser vista como um balanço entre os pontos fortes e fracos do aluno, numa perspetiva de interação reguladora, em que há diálogo e ações em redor de tarefas, no sentido da sua superação das suas dificuldades (Hadji, 1997). Deste modo, há um processo aberto e negociado entre os vários atores, onde as regras de jogo são conhecidas. A avaliação assume uma natureza relacional assente num processo de comunicação, em que os atores têm necessidade de partilhar códigos, tomar decisões, agir para responder aos problemas e refletir sobre a própria ação avaliativa (Pinto, 1991, citado em Pinto & Santos, 2006). Há necessidade dos alunos terem uma voz mais ativa sobre a sua própria avaliação "para que estes se sintam comprometidos com este trabalho de resolução, identificação e superação das dificuldades" (Pinto, 2003, p. 8), o que significa que "a avaliação não deve ser apenas feita sobre os alunos, mas deve também ser feita para os alunos, para os guiar e potenciar a sua aprendizagem." (NCTM, 2000, p. 22). Deste modo, é necessário que o professor crie os contextos pedagógicos propiciadores à regulação das aprendizagens, utilizando tarefas e metodologias de trabalho diversificadas, que favoreçam a apropriação dos critérios de avaliação por parte dos alunos e que propiciem o seu trabalho em função das suas necessidades e os levem a refletir sobre a sua aprendizagem, ocorrendo deste modo a autoavaliação (Pinto & Santos, 2006).

Em resumo, ao longo do tempo, a avaliação, para além das funções assumidas a nível social, como a certificação, orientação e seleção, também assume uma função de regulação do processo de ensino e aprendizagem.

Leal (1992) faz referência a seis princípios orientadores da avaliação: coerência (harmonia entre objetivos, metodologias e conteúdos); integração (articulação entre avaliação e aprendizagem); caráter positivo (privilegiar o que o aluno sabe fazer); generalidade (contemplar os objetivos gerais do ensino da matemática e ver o aluno como um todo); diversidade (de instrumentos de avaliação e fontes de informação); e postura (ambiente de confiança e transparência). É necessário que os professores compreendam a matemática, conheçam o currículo e saibam como os alunos aprendem, pois o principal objetivo da avaliação é a promoção das suas aprendizagens, tendo em conta a valorização das qualidades e experiências de cada um, sendo por isso necessário dar importância a algumas normas para que haja qualidade na avaliação em matemática: Matemática, aprendizagem, transparência, inferências e coerência (NCTM, 1995/96). A avaliação deve ser pública, participada, dinâmica, válida e adequada, para que em todo o seu conjunto seja um processo coerente (NCTM 1995/96). Mais recentemente, Correia (2004) refere sete princípios relativamente à avaliação: equidade, positividade, melhoria, coerência, transparência, diversificação de procedimentos e diversificação de intervenientes. De acordo com os princípios aqui apresentados pelos autores citados, a principal função da avaliação é a promoção das aprendizagens.

Avaliação reguladora

Segundo Allal (1986), o termo "avaliação formativa" foi criado por Scriven num artigo em 1967 e tem tido vários significados ao longo do tempo. Em Santos. (2008) são citados vários autores que se pronunciaram sobre a avaliação formativa e que lhe atribuíram diversas designações:

- Barlow (1992) – "comunicação avaliativa";
- Black *et al*. (2003) – "avaliação para a aprendizagem";
- Fernandes (2005) – "avaliação formativa alternativa";
- Jorro (1996) – "avaliação-regulação";
- Nunziatti (1990) – "avaliação formadora";
- Weiss (1994) – "interação formativa";
- Allal (1986) – "avaliação reguladora";
- Pinto & Santos (2006) – "avaliação reguladora". ´

É assim necessário clarificar qual o termo utilizado neste estudo em particular: avaliação reguladora das aprendizagens. A partir de vários estudos efetuados, Black e William (1998a) assumiram que a avaliação formativa envolve um conjunto de atividades desenvolvidas pelos professores e/ou alunos, utilizando o feedback para modificar as atividades de ensino e aprendizagem. Para Santos (2002, p. 77) a avaliação reguladora das aprendizagens é considerada como "todo o ato intencional que, agindo sobre os mecanismos de aprendizagem, contribua diretamente para a progressão e/ou redireccionamento dessa aprendizagem". A regulação das aprendizagens poderá advir de uma multiplicidade de processos: a avaliação formativa; a coavaliação entre pares e a autoavaliação (Santos, 2002). A avaliação, contudo, só é verdadeiramente reguladora se tiver implicações para a aprendizagem, pois caso contrário, trata-se apenas de uma avaliação com uma intenção reguladora (Santos, 2008). Já Perrenoud (1999) considera a avaliação formativa como uma regulação externa feita pelo professor que só ocorre quando as outras formas de regulação não funcionarem.

A avaliação reguladora desencadeada pelo professor visa essencialmente contribuir para a melhoria das aprendizagens do aluno e algumas das suas funções estão associadas a um papel de ajuda da aprendizagem (Hadji, 1994), o que se traduz em alguns apoios que o professor deve dar: segurança, na medida em que se pretende consolidar a confiança do aprendente em si próprio; assistência, ou seja, marcar etapas, dar pontos de apoio para progredir; *feedback*, ou seja, dar, o mais rapidamente possível, uma informação útil sobre as etapas vencidas e as dificuldades encontradas; e "alimentar um verdadeiro diálogo entre professor e aprendente que esteja fundamentado em dados precisos (Hadji, 1994, p. 64).

A avaliação reguladora, segundo Allal (1988a), pode funcionar de três modos: regulação proactiva (ajuste das estratégias aos diversos alunos no início de uma nova situação didática); regulação interativa (ao longo de todo o processo de aprendizagem, ao surgirem dificuldades nos alunos, são diagnosticados os fatores que contribuíram para essa dificuldade e fazem-se adaptações); regulação retroativa (no termo de uma sequência de aprendizagem, logo, não detetadas as dificuldades dos alunos). Para Perrenoud (1999), a regulação proactiva não é uma forma de avaliação, ao contrário da regulação interativa e retroativa. A regulação interativa é primordial porque está associada a uma metodologia de trabalho e à diferenciação do ensino, pelo que "só ela é capaz de agir sobre o fracasso escolar" (Perrenoud, 1999, p. 107). Também Santos (2002) privilegia a regulação interativa pelo fato de ser atempada e ser mais significativa para o aluno. No entanto, a autora também considera os outros tipos de regulação. As práticas de avaliação reguladora devem ocorrer por vários processos como o questionamento oral, a escrita avaliativa, a coavaliação entre pares e a autoavaliação (Santos, 2008).

Coavaliação entre pares

Em relação à coavaliação entre pares é referido por Wood, Cobb e Yackel (1991) que nos momentos em que há colaboração entre pares e discussão em grande grupo é proporcionado aos alunos o envolvimento no discurso, ficando os seus significados pessoais sujeitos a uma negociação com outros significados individuais, de forma a ser possível chegar a um consenso. É salientado por Perrenoud (1999) que os alunos devem expor e confrontar ideias, argumentar afirmações, tomar decisões, planear o trabalho e procurar recursos. Desta forma, é promovida a entreajuda e apoio mútuo entre pares, o que revela fortes potencialidades na reestruturação de conhecimentos, regulação de aprendizagens e desenvolvimento da responsabilidade e autonomia dos alunos (Santos, 2002).

A coavaliação é um processo de regulação das aprendizagens que ocorre quando é utilizada a metodologia de trabalho de grupo e os alunos se envolvem em decisões sobre o trabalho dos colegas (Noonan & Duncan, 2005). Contudo, é necessário que haja interação social entre os alunos e que a tarefa seja propiciadora à comunicação (Santos, 2002). Quando ocorre coavaliação, também o próprio aluno se regula, logo funciona simultaneamente como uma regulação interna e externa do aluno (Santos 2002) o que faz com que seja um processo de regulação das aprendizagens, pois funciona como um complemento da autoavaliação (Black *et al.*, 2003), em que os alunos planeiam o seu trabalho, procuram recursos, confrontam ideias, argumentam e tomam decisões (Perrenoud, 1999). Para Black *et al.* (2003), este tipo de regulação das aprendizagens é fundamental porque numa situação em que os alunos não compreenderam algo, é mais fácil questionar o colega do que o professor, até mesmo pelo fato de utilizarem a linguagem natural. Este autor também refere que outra das vantagens da coavaliação é que os alunos conseguem aceitar mais facilmente as críticas dos colegas do que do professor e quando lhes são colocadas questões assumem o papel de professores (Black *et al.*, 2003).

Uma das funções da coavaliação é contribuir para um maior envolvimento dos alunos no processo de aprendizagem, aumentar as interações sociais e confiança nos outros, facilitar o feedback individual e influenciar as realizações dos alunos por focar os alunos nos processos e não nos produtos (Johnson, 2004).

Autoavaliação

A autoavaliação representa um confronto entre a ação desenvolvida numa tarefa e os critérios de realização da tarefa (Jorro, 2000). Como tal, é fundamental que os alunos se apropriem desses mesmos critérios de forma partilhada e negociada, através de uma linguagem acessível para que compreendam claramente o que lhes é esperado (Santos, 2002). Também Pinto (2003, p. 8) diz que "O trabalho de explicitação dos critérios de avaliação em redor das várias tarefas que ocorrem no quotidiano escolar é um trabalho fundamental para o professor e também para o aluno".

Em relação à autoavaliação Santos (2002) refere que se trata de um processo de metacognição, em que o aluno toma consciência dos vários momentos e aspetos da sua atividade cognitiva e implica uma reflexão e crítica sobre as suas ações. Nunziatti (1990, citado em Santos, 2002) entende a autoavaliação como um processo interno que permite ao sujeito regular o pensamento e aprendizagem. Aponta e salienta igualmente que permite que a aprendizagem e os procedimentos do aluno não sigam a lógica do professor, considerado como um perito. O professor não garante a apropriação dos conhecimentos por parte do aluno e os erros só podem ser ultrapassados por aqueles que o cometem e não por aqueles que os assinalam, porque "a atividade metacognitiva do aluno acontece quando ele toma consciência dos seus erros e da sua maneira de se confrontar com os obstáculos" (Santos, 2002, p. 4).

A autoavaliação é um processo que acontece em duas fases, ou seja, o aluno começa por comparar o que fez com o que era esperado e, ao detetar as diferenças, age para que possa reduzir ou eliminar essas diferenças (Santos, 2008). Por este motivo é necessário que o professor tenha cuidado na seleção das tarefas e estratégias para que sejam propiciadores da capacidade de autoavaliação dos alunos (Santos, 2002). Esta autora dá alguns exemplos de estratégias a seguir para que possa ser desenvolvida a autoavaliação regulada dos alunos, ou seja, a explicitação/ negociação dos critérios de avaliação, a abordagem positiva do erro, o questionamento dos alunos, oralmente ou por escrito, e a utilização de instrumentos alternativos de avaliação.

Para que a autoavaliação possa acontecer é necessário que o aluno tenha consciência dos objetivos pretendidos e do nível de exigência da tarefa, assim como dos recursos que tem disponíveis, para que possa avaliar o que foi atingido e redirecionar a sua atividade para conseguir alcançar resultados para si satisfatórios (Silva & Sá, 2003; Silva, 2004). Alguns exemplos de autorregulação são as esquematizações, o aperfeiçoamento e autocorreção de produções efetuadas e a persistência na resolução de problemas. A autoavaliação é um processo que requer tempo e alguma prática (Black *et al.*, 2003).Uma das suas principais dificuldades é o fato dos alunos por vezes não terem uma ideia clara dos objetivos a atingir (Black & William, 1998b). A autoavaliação pressupõe a existência de um "objetivo, padrão, critério ou valor de referência" (Sá, 2004, p.67) para orientar a regulação das aprendizagens. Os critérios de avaliação devem servir de referência e serem apropriados ao aluno, para que este compreenda o que lhe é esperado no seu trabalho (Hadji, 1994; Black & Wiliam, 1998a). A apropriação de critérios de avaliação leva a uma melhoria no desempenho dos alunos, pois têm uma maior preocupação nos registos e na sua organização, na existência de maior diversidade de exemplos, que por sua vez, proporcionam uma melhoria da justificação e prova sobre as suas ideias e também a verificação da não existência das mesmas (Gomes, 2005). À medida que os alunos melhoram a sua capacidade de autoavaliação, surge também uma capacidade crítica que, por sua vez, leva a um melhor desempenho na realização dos relatórios e na comunicação matemática (Santos & Gomes, 2006).

Para o professor facilitar o processo de autoavaliação dos alunos, segundo Santos (2002), deve ter consciência dos critérios de avaliação e partilhá-los com os alunos numa linguagem acessível, podendo fazê-lo de duas formas: i) partilha feita simplesmente por uma comunicação aos alunos dos critérios definidos (partilha unilateral); ii) processo de negociação em que os alunos se envolvem na definição dos critérios em conjunto com o professor (partilha bilateral), em que é possível implicar e corresponsabilizar os alunos no seu processo de avaliação. Também Wiliam (2007), em consonância com Santos (2002), considera que há estratégias que possibilitam a apropriação dos critérios de avaliação, nomeadamente a partilha com os alunos, seguida de uma reflexão sobre o que é importante ou não e o contato com exemplos de trabalhos de outros alunos, para que possam analisar se são ou não bons trabalhos e quais as razões. No entanto, a implementação de estratégias para promover a apropriação dos critérios de avaliação podem não ser suficientes para eliminar a dificuldade dos alunos neste processo, uma vez que este ocorre antes da ação e vai sendo construído progressivamente à medida que ocorrem as diversas experiências de aprendizagem (Santos, 2008). Há igualmente referências que vão surgindo devido à contribuição da coavaliação entre pares, do feedback, da oportunidade de melhoria dos relatórios e das autoavaliações (Gomes, 2005).

Estratégias propiciadoras de regulação das aprendizagens

Abordagem positiva do erro

O erro pode ser encarado segundo várias perspetivas: um mal a erradicar, um sintoma, uma ação formativa e uma ação criativa (Pinto & Santos, 2006). No primeiro caso, a ideia é descobrir o erro, torná-lo visível e contabilizá-lo, considerando-o como algo socialmente reprovável, no segundo caso, o erro é visto, não como uma falta, mas antes como um sintoma de que há algo que não está bem, cuja causa pode não ser exclusivamente do aluno, mas também causas exteriores à interação (Jorro,2000) e que pode ser remediada por uma reorientação do processo de aprendizagem ou por insistência no processo já iniciado. Na perspetiva de erro como uma ação formativa, em que este está relacionado com o aluno, contexto e também com o professor, há uma construção do conhecimento que é apresentada pelo aluno por uma representação e que é comparada com as expetativas a nível curricular, o que, segundo Pinto e Santos (2006), permite compreender as dificuldades do aluno e também incentivar o professor à reflexão sobre o contexto de aprendizagem que os alunos estão sujeitos, a clareza da tarefa e a explicitação dos critérios de avaliação. Na última perspetiva de Pinto e Santos (2006), ou seja, quando o erro é encarado como uma ação criativa, há um afastamento do que é produzido em relação ao saber instituído, que gera um pensamento divergente, o que é útil na escolha de uma estratégia adequada para a resolução de um problema.

A identificação do erro é feita por um processo de aprendizagem do aluno que ocorre quando este explica como procedeu e que frequentemente leva à descoberta do erro. Esta abordagem do erro é bastante frequente num contexto de avaliação reguladora e, segundo Santos (2003, p. 18), "entendendo o erro como um fenómeno natural no processo de aprendizagem, ele pode constituir um meio rico de informação que nos permite aceder ao raciocínio do aluno, dificilmente conseguido por outra via". Através do erro é possível aceder aos processos mentais dos alunos e para que a aprendizagem seja efetiva é necessário que os alunos não só reconheçam e compreendam o erro, mas também que o corrijam, o que neste caso se trata de um processo de metacognição (Santos, 2008). Dar a hipótese de ser o aluno a identificar os erros, ser ele próprio a corrigi-los e a chegar às respostas corretas são estratégias que favorecem a aprendizagem (Nunziati, 1990; Jorro, 2000; Pinto & Santos, 2006). Desta forma, torna-se necessário salientar os pontos fortes dos alunos e ajudá-los a encontrar os seus pontos fracos, para que possam encontrar formas de os ultrapassar (Pinto & Santos, 2006).

Quando se trata de comunicação matemática, em particular desenvolvida através de produções escritas, o professor "deverá não só fomentar a exploração das produções corretas, como também utilizar o erro para alterar e consolidar aspetos conceptuais ou processuais" (Sousa, Cebolo, Alves, & Mamede, 2009, p. 9). O erro faz parte do desenvolvimento de qualquer tarefa e quando o professor incentiva o aluno a confrontar os seus resultados com os dos colegas ou a desenvolver o seu trabalho há uma ”interação formativa entre o professor e os seus alunos” (Pinto, 2003, p. 6).

Questionamento oral

Uma forma de diálogo que é comum na sala de aula é o questionamento oral do professor ao aluno, que deve ser planeado e conduzido para que haja aprendizagem (Black *et al*., 2003). Este planeamento nem sempre acontece e, por vezes, as questões são utilizadas para verificar se os alunos compreenderam o que era pretendido (William, 2007). O questionamento por parte do professor, segundo Santos (2003, p. 18) tem diversos objetivos:

i) Orientar o raciocínio do aluno para uma direção que dê frutos;
ii) Permitir que o próprio identifique o erro;
iii) Contribuir para o desenvolvimento da capacidade de autoavaliação regulada do aluno.

Assim, segundo vários autores citados em Santos (2008, p. 22), “para que o questionamento constitua um contexto potencialmente regulador deverá ser intencional por parte do professor; ser feito sem constrangimentos de tempo, fazer parte de um processo de comunicação bilateral e formado essencialmente por perguntas de tipo aberto” (Black & William, 1998b; Fernandes, 2005; Santos, 2004). Nem sempre são utilizadas estas características no questionamento oral do professor, pois muitas vezes não há tempo suficiente para o aluno pensar sobre a questão e conseguir responder, o que faz com que este deixe de refletir e pensar na resposta, entretanto dada pelo professor (Black & Wiliam,1998b). As perguntas fechadas, por serem as que possibilitam uma resposta num curto espaço de tempo não favorecem a compreensão da maior parte dos alunos e estes podem limitar-se a tentar adivinhar a resposta correta (Gipps, 1999), o que não apresenta potencialidades para o desenvolvimento da capacidade de autorregulação, pois os alunos não querem errar em público (Black & Wiliam, 1998b).

Assim, para que o ambiente de sala de aula seja propício ao desenvolvimento desta capacidade de autorregulação, também o questionamento deve apresentar algumas características, nomeadamente promover a reflexão e compreensão, permitir aos alunos expressarem as suas ideias e desenvolverem um argumento e para que tal aconteça o professor deve apenas dar pistas e aumentar o tempo de resposta para que os alunos participem ativamente na discussão (Santos, 2008). Ao fazê-lo, o professor aprende mais sobre os conhecimentos prévios dos alunos e deteta mais facilmente as dificuldades que estes apresentam, tornando-lhe possível responder de forma fundamentada às suas necessidades (Black *et al*., 2003). Para Santos (2008, p. 18), para que o questionamento oral na sala de aula proporcione a regulação das aprendizagens é necessário que promova uma regulação interativa entre professor e alunos e que seja: "i) intencional; ii) participada pelos diversos elementos constituintes da comunidade; iii) considerar o erro sem estatuto diferenciado não se destacando os que erram daqueles que acertam; (iv) privilegiar e respeitar diferentes modos de pensar; (v) reconhecer a comunidade turma como campo legítimo de validação ou correção de raciocínios e processos".

A apresentação de boas questões é um desafio sentido pelo professor pois é difícil encontrar questões adequadas para o aluno que lhe permita regular a sua aprendizagem, mas com alguma persistência e experiência esta tarefa torna-se mais simples (Santos, 2003b).

Feedback escrito

Das várias formas de comunicação entre professores e alunos, o feedback é um conceito que tem uma posição central na avaliação formativa (Black & William, 1998), pois permite a regulação das aprendizagens, tal como vem referenciado em NCTM (1995). De acordo com este documento, os alunos devem ir recebendo feedback em diferentes tipos de tarefas que incidam sobre importantes conteúdos matemáticos. Para que o feedback escrito ou escrita avaliativa surja como uma estratégia propiciadora da autorregulação dos alunos é necessário que os alunos tenham oportunidade de melhorar as suas produções (Santos, 2008). Também Gipps (1999) considera o feedback como uma ligação entre a avaliação e a aprendizagem, podendo ser de dois tipos: avaliativo (formação de juízos de valor e com pouco efeito regulador) ou descritivo (desempenho dos alunos face às tarefas propostas). O feedback descritivo, segundo Gipps (1999) pode ser ainda dividido em: i) feedback que especifica o progresso, em que o professor aprecia o trabalho e diz quais os conhecimentos e processos que foram utilizados e diz ao aluno o que deve ser feito; ii) feedback construtivo, em que tanto o professor como o aluno apreciam o trabalho e discutem formas de progressão e é dado ao aluno maior responsabilidade, o que incentiva um maior envolvimento na aprendizagem. Gipps (1999) também considera dois tipos de feedback: i) anotação como transmissão de informação (com juízos de valor e sem contributo para a aprendizagem; ii) anotação como diálogo (questiona, dá pistas e incentiva à reflexão). Para Kluger e DeNisi (1996, citado em Black e Wiliam,1998a) o feedback pode ser de três tipos: feedback com intuito de metacognição; feedback com intuito de motivação; feedback com o intuito de desenvolver processos de aprendizagem.

No caso em que o feedback se dirige mais ao aluno do que à tarefa pode ter efeitos negativos no desempenho do aluno (Black & Wiliam, 1998a). O feedback só é verdadeiramente regulador se for utilizado pelos alunos com o objetivo de melhorar a sua aprendizagem, pois quando este não apresenta características reguladoras também pode ter um impacto negativo no desempenho dos alunos (Wiliam, 2007). Segundo Black e Wiliam (1998a) mesmo quando o feedback apresenta elogios que permitem aumentar o interesse do aluno, estes não contribuem para a aprendizagem. Deste modo, segundo estes autores, o feedback deve centrar-se no desempenho dos alunos e focar o que é necessário ser melhorado, sem utilizar juízos de valor.

Segundo Santos (2003), para que haja uma função reguladora resultante do feedback, este deve reunir determinadas características: ser claro; apontar pistas para uma ação futura; incentivar a reanálise da resposta; permitir que seja o aluno a identificar e corrigir o erro; realçar os pontos fortes para promover a autoconfiança do aluno e permitir que o saber seja conscientemente reconhecido. Para William (2007), o feedback permite dar de forma detalhada indicações orais ou escritas ao aluno sob a forma de comentários ou questões reflexivas, que não incluam juízos de valor, mas que promovam a reflexão dos alunos sobre o trabalho desenvolvido. Contudo, segundo este autor, o mesmo feedback pode não surtir o mesmo efeito em todos os alunos.

Em Dias (2008) é referido um exemplo em que a professora dá o mesmo feedback a dois alunos, focando aspetos positivos, focando o erro e colocando questões que procuram direcionar a estratégia dos alunos e incentivar os alunos a continuar. Contudo, o mesmo feedback escrito não serve da mesma forma todos os alunos, pois tiveram interpretações diferentes, o que se reflete na segunda versão de cada um dos alunos. Algumas das dificuldades na eficácia do feedback são focadas em Dias & Santos (2009): ser difícil escrever pistas dos conceitos matemáticos sem ser de forma explícita; não ser sempre formativo, uma vez que é dificilmente mobilizável em situações futuras, pois está muito relacionado com a tarefa. O feedback escrito é tendencialmente mais efetivo quando é curto (Dias, 2008), mas as tarefas abertas levam a feedback mais longo, o que pode originar uma dificuldade acrescida para os alunos (Santos & Pinto, 2009), ou seja, uma incapacidade dos alunos em articular as diferentes ações propostas no feedback e em atribuir prioridades nessas ações. Assim, para Dias e Santos (2010) o professor deverá tornar o feedback mais curto, propondo poucas ações de cada vez, mas com um maior número de fases.

Outro dos aspetos que é importante considerar para a compreensão do feedback é a linguagem utilizada, que deve ser acessível ao aluno, concreta, contextualizada e que relacionada com o que o aluno produziu (Bruno, 2006). O feedback ou escrita avaliativa pode apresentar-se na forma de comentários ou questões (Santos, 2002). É necessário também ter em conta o momento e a quantidade de informação, pois é necessário dosear a informação, dar apenas a informação necessária para o aluno prosseguir e garantir que o feedback só é dado depois dos alunos terem tido oportunidade de trabalhar na tarefa para que haja mais aprendizagem. (Wiliam, 2007).

A eficácia do feedback na melhoria da aprendizagem dos alunos também está relacionada com o tipo de tarefas, pois segundo Bangert-Drowns, Kulick & Morgan (1991) em tarefas de carácter aberto o feedback parece ser mais eficaz, ao contrário do que acontece em tarefas de carácter mais fechado. Segundo Hattie & Timperley (2007) nas tarefas de natureza mais aberta o feedback é mais orientado para a autorregulação, pois é escrito com a intenção de chamar a atenção dos alunos para aspetos específicos da tarefa e também de reforçar positivamente o aluno pelas conjeturas corretas, de forma a incentivar a sua continuação. Nas tarefas de natureza mais fechada, o feedback está relacionado com conteúdos matemáticos específicos e com a própria tarefa. Nos problemas, é escrito com a intenção de reforçar positivamente o aluno pelo trabalho desenvolvido e incentivar a sua continuação e, nos exercícios, é escrito com a intenção de chamar a atenção do aluno para determinados conteúdos específicos.

Um estudo realizado por Butler (1998) citado em Wiliam (2007) refere que os comentários escritos apresentam benefícios, como a evolução do trabalho dos alunos da primeira para a segunda versão, que desaparecem quando estes comentários são acompanhados de uma classificação, tal como acontece em trabalhos que são apenas classificados. A melhoria da qualidade do feedback escrito dado aos alunos envolve um esforço e trabalho por parte do professor, que pode ser diminuído quando há colaboração entre professores, na medida em que podem partilhar exemplos de comentários (Black *et al*., 2003).

Instrumentos de avaliação

Quando se tem por base uma avaliação reguladora e se pretende desenvolver a capacidade de autoavaliação dos alunos é necessário utilizar instrumentos de avaliação alternativos aos testes tradicionais (Santos, 2002), como, por exemplo, os testes em duas fases, os relatórios escritos e os portefólios (Pinto & Santos, 2006). Os testes tradicionais não permitem ao aluno investigar ou refletir, isto é alcançar na totalidade os objetivos de aprendizagem que são abordados nas orientações curriculares (Pinto & Santos, 2006). Por este motivo, cabe ao professor selecionar estes instrumentos, dependendo do tipo de informação que se pretende obter, sendo necessário diversificá-los e proporcionar momentos de aprendizagem em que seja incentivado a autonomia, o empenho nas tarefas e a autoavaliação (Leal, 1992; Menino, 2004; Pinto & Santos 2006). Contudo, neste subcapítulo apenas irei debruçar-me sobre o relatório escrito, uma vez que o tema deste estudo é o desenvolvimento da comunicação escrita matemática e pretendo analisar de que forma o feedback dado às produções dos alunos promove o desenvolvimento da sua capacidade de comunicação matemática.

Os relatórios escritos são produções feitas pelos alunos onde estes têm de descrever ou analisar uma situação ou tarefa realizada. Este instrumento permite ao aluno articular ideias, explicar procedimentos, fazer uma análise crítica dos resultados e processos utilizados (Menino, 2004). Desta forma, para além do conhecimento, também são desenvolvidas as capacidades transversais, como a comunicação, o raciocínio e a resolução de problemas, referenciadas em NPM (2007). Uma das principais potencialidades deste instrumento de avaliação é o fato de permitir o desenvolvimento da comunicação escrita (Leal, 1992) e também o fato de incentivar o aluno a refletir sobre a sua aprendizagem, pois este aa explicar aos outros pela forma escrita está a clarificá-la e reestruturá-la (Pinto & Santos, 2006). À semelhança com os testes em duas fases e o portefólio, proporcionam a regulação das aprendizagens, principalmente quando é possível ao aluno realizá-lo em duas fases, sendo a primeira versão sujeita ao feedback escrito do professor e posteriormente ser utilizado para que o aluno possa aperfeiçoar a sua produção e apresentá-la como a versão final (Leal, 1992; Santos, 2004; Pinto & Santos, 2006). Segundo estes autores, o relatório pode ser feito tanto individualmente como em grupo e também pode ser usado tanto na aula como fora da aula, partindo de variadas tarefas. Quando é feito na aula dá oportunidade ao aluno de recorrer aos colegas e ao professor para ultrapassar as dificuldades (Varandas, 2000).Quando é feito fora da aula permite ao aluno ter mais tempo para o fazer (Leal, 1992). No entanto, Menino (2004) atribui uma limitação ao relatório realizado fora da aula, ou seja, o fato de não permitir ao professor obter informação sobre a participação dos alunos na tarefa. Para este autor, em consonância com Leal (1992), o relatório em grupo deve ser usado em tarefas realizadas em grupo e quando são tarefas individuais, deve ser individual. O relatório escrito apresenta várias potencialidades ao nível da nível da regulação das aprendizagens uma vez que permite aos alunos mencionar dificuldades sentidas e identificar erros de forma reflexiva, mas também apresenta potencialidades na comunicação matemática uma vez que lhes permite descreverem processos e estratégias (Pinto & Santos, 2006). Para que possam ser diminuídas as dificuldades sentidas pelos alunos nas primeiras produções de relatórios é necessário que o professor apresente exemplos de relatórios feitos por outros alunos e um guião de apoio à sua realização, onde constem os critérios de avaliação e a estrutura esperada, de modo a ser possível compreenderem o que lhes é proposto (Pinto & Santos, 2006). Outra das preocupações do professor na utilização deste instrumento de avaliação é salientar aos alunos que devem incluir no relatório escrito como procederam, quais as aprendizagens alcançadas e as dificuldades sentidas (Menino, 2004). Segundo este autor, também o professor poderá sentir dificuldade na sua utilização, como por exemplo comentar a primeira versão do relatório, o que poderá ser diminuído se utilizar uma tabela de descritores.

Outro dos desafios do professor é a classificação dos relatórios (Pinto & Santos, 2006), pois pode gerar um conflito entre a avaliação com base em critérios e a avaliação reguladora das aprendizagens (Menino, 2004). Neste instrumento de avaliação é privilegiada uma classificação qualitativa, ao contrário de uma quantitativa, pois é possível ao professor escrever um comentário qualitativo global, tendo em conta os critérios de avaliação previamente estabelecidos (Leal, 1992; Menino, 2004).

Capítulo V

Metodologia de Investigação

Neste capítulo descrevo as opções metodológicas que tomei neste estudo, assim como as características dos alunos participantes e o contexto pedagógico no qual se desenvolveu esta investigação. Para além disso, há ainda uma descrição do processo de recolha de dados onde são referidos os métodos utilizados e o processo de análise dos casos.

Opções metodológicas

Neste estudo seguindo um paradigma interpretativo, optei por uma abordagem de natureza qualitativa, uma vez que se trata de uma análise da evolução da capacidade de comunicação escrita matemática dos alunos. A metodologia utilizada numa investigação condiciona a sua qualidade, pelo que é importante escolher uma metodologia adequada às questões de investigação e aos objectivos traçados (Yin, 2002). O design desta investigação foi o estudo de caso, uma vez que os dados foram recolhidos em sala de aula e pretendia-se que este estudo apresentasse um caráter descritivo e interpretativo, permitindo identificar e clarificar problemas ao aprender e ensinar (LaBoskey & Wilson, 1987).

Optei por esta metodologia por ser a que se adequava ao estudo e às questões formuladas, uma vez que se pretende compreender e analisar o contributo das produções escritas em Matemática, quando acompanhadas de feedback fornecido pelo professor, para o desenvolvimento da comunicação escrita matemática de alunos do 2º.ciclo. Por este motivo, os dados são usados para ilustrar e sustentar resultados escritos, ricos em pormenores descritivos e incluem transcrições de entrevistas, produções dos alunos e notas de campo (Bogdan & Biklen, 1994). A escolha do estudo de caso como design de investigação também se deve à necessidade de compreender uma situação particular e não a uma generalização de conclusões (Ponte, 2006), obedecendo às características da investigação de tipo interpretativo apontadas por Merrian (1988):

1- Preocupar-se principalmente com os processos e as dinâmicas;
2- Depender de forma decisiva dos investigadores;
3- Proceder-se por indução, na medida em que os seus instrumentos são parcialmente reformulados ao longo do seu desenvolvimento;
4- Baseou-se em descrições.

Os processos são a fonte principal de preocupação desta investigação, em detrimento dos produtos. Neste estudo, é fundamental conhecer e compreender quais as dificuldades ou facilidades com que os alunos se vão deparando em relação às tarefas e particularmente nos registos escritos que fazem sobre as mesmas. Desse modo, não se tem em consideração apenas os resultados finais, mas, acima de tudo, as actividades e os procedimentos. Os dados são analisados de forma indutiva (Bogdan & Biklen, 1994), pois com este estudo procuro conhecer e compreender, através dos dados que foram sendo recolhidos, quais as estratégias utilizadas nas produções escritas e nas entrevistas. Não se procura testar nenhuma hipótese, mas antes, contribuir para a construção de novo conhecimento sobre a temática abordada. Assim, só com o desenrolar do processo de análise de dados é possível construir "abstracções" relativamente ao objecto de estudo (Bogdan & Biklen, 1994). O significado é de importância vital, porque neste estudo as perspetivas dos participantes têm uma importância central. Em particular, através das entrevistas, procuro questionar os participantes no sentido de perceber as suas estratégias utilizadas nas produções escritas sobre as tarefas propostas.

Trata-se de uma investigação de natureza empírica, que se baseia nas produções escritas dos alunos na resolução das tarefas de natureza diversificada e nos dados recolhidos das entrevistas, havendo a preocupação de perceber "como?" e "porquê?", procurando tirar partido de múltiplas fontes de evidência (Yin, 2002). Pode assim dizer-se que tem características de um estudo interpretativo, pois tem em conta "detalhes específicos que são pistas úteis para a compreensão do mundo dos sujeitos" e a "razão por que os objectos foram produzidos e como isso afecta a sua forma bem como a informação potencial daquilo que está a estudar"(Bogdan & Biklen, 1994, p. 200). Assim, foram realizados três estudos de caso, correspondentes a cada um dos alunos (Filipe, Jéssica, Isabel), cuja perspetiva foi analisada para que pudesse traçar uma linha estratégica que me permitisse ajudar os alunos a evoluírem nas suas aprendizagens e no desenvolvimento da comunicação escrita matemática (Bogdan & Biklen, 1994).

Participantes

Esta investigação foi realizada no ano letivo 2011/2012 e envolveu uma turma de 5.ºano de escolaridade de uma Escola Básica da Margem Sul do Tejo com sensivelmente 26 alunos. A opção por esta turma prendeu-se com o facto de ser a turma que me foi atribuída neste ano letivo e pelo facto de procurar analisar a capacidade de interpretação dos alunos do feedback por mim fornecido. A turma onde se desenvolveu o estudo era constituída por 26 alunos, sendo 15 raparigas e 11 rapazes, com idades compreendidas entre os 10 e os 12 anos. Todos os alunos frequentavam o 5.º ano pela primeira vez, à exceção de dois alunos que ficaram retidos no ano letivo anterior.

A direção da escola foi informada sobre os objectivos gerais do estudo e deu o seu consentimento. Foi também enviada uma carta aos Encarregados de Educação dos alunos da turma envolvida, explicando os objectivos gerais do estudo, a fim de obter a autorização para a gravação áudio dos seus educandos em contexto de sala de aula e de entrevista. Para os estudos de caso foram selecionados três alunos de acordo com critérios comuns e um critério diferenciador. Os critérios comuns são os seguintes: i)Serem alunos não repetentes no 5.ºano, porque se pretende que os alunos selecionados estejam na mesma situação de estar pela primeira vez no 2.º ciclo. ii)não serem alunos com necessidades educativas especiais**,** pois este fator não é o foco para o estudo. iii)Terem autorização dos encarregados de educação para a sua participação no estudo, para que não seja um factor de impedimento da realização do estudo. iv)Revelarem disponibilidade para participar no estudo, para que o estudo decorra com toda a normalidade, sem que os alunos estejam sujeitos a instabilidade. O critério diferenciador foram os diferentes desempenhos matemáticos apresentados pelos alunos, para que o estudo possa analisar o desenvolvimento da comunicação matemática de alunos com diferentes pontos de partida. Por estes motivos apresentados anteriormente foram selecionados três alunos: Filipe, Jéssica e Isabel, cujo desempenho na disciplina de Matemática é respetivamente pouco satisfatório, satisfatório e bom.

Contexto pedagógico

As sessões de trabalho foram sobre temas diferentes e cada sessão de trabalho foi realizado em grupo e teve início com a distribuição das folhas com o enunciado da tarefa, que foi selecionada pela professora, tendo em conta a integração nos conteúdos que estavam a ser lecionados no momento em que foram implementadas. Na elaboração das tarefas procurei que elas tivessem características diferentes e que não só permitissem aos alunos adquirirem conhecimento, mas também que permitissem experimentar, explorar e comunicar sobre a matemática. Desta forma, procurei que os alunos se envolvessem na criação da sua própria matemática (Bishop & Goffree, 1986) e na gestão das tarefas a utilizar neste estudo incluí um problema (tarefa 1), duas investigações (tarefa 2 e 3) e explorações (tarefa 4 e 5). Embora também tenha permitido aos alunos a realização de exercícios, não incluí este tipo de tarefas no estudo por serem fechadas e terem um processo de resolução rápido (Ponte, 2005). No caso dos exercícios utilizei apenas o feedback oral e no caso das restantes tarefas utilizei o feedback escrito e oral para que os alunos aperfeiçoassem a segunda versão dos seus relatórios escritos. Durante a realização das tarefas apresentadas neste estudo a metodologia de trabalho utilizada pelos alunos foi o trabalho de grupo.

A tarefa 1 proposta aos alunos é um problema que foi implementado no seguimento de um conjunto de tarefas sobre identificação, classificação e compreensão das propriedades de polígonos (anexo 5). Concretamente é pedido aos alunos que verifiquem de quantas formas diferentes é possível pintar o quadrado que se encontra dividido em quatro triângulos geometricamente iguais. Inicialmente é pedido que o façam apenas com uma cor e depois que o façam com duas cores. Para além disso, também é pedido que escrevam quais os critérios que os alunos utilizaram para conseguir dar a resposta, ou seja, qual a estratégia utilizada, sendo por isso o objetivo principal desta tarefa permitir aos alunos desenvolveram a sua comunicação escrita matemática e terem conhecimento do modo de elaboração e organização de um relatório escrito. Uma vez que os alunos nunca tinham feito um relatório escrito foi-lhes fornecido um guião onde constava a forma e estrutura pretendidas (anexo 4): Introdução, desenvolvimento e conclusão. Os alunos realizaram a tarefa em grupo na aula de Matemática do dia 28 de Outubro de 2011 e simultaneamente realizaram a primeira versão do relatório escrito. Esta primeira versão do relatório escrito foi sujeita a um comentário escrito pela professora, sendo devolvida aos alunos no dia 31 de Outubro de 2011, que elaboraram individualmente a segunda versão do mesmo.

A tarefa 2 é uma tarefa de exploração sobre os polígonos, a sua identificação, classificação e compreensão das suas propriedades (anexo 6). Teve como objetivo dar seguimento à tarefa 1 e o relatório escrito também foi realizado em duas fases e sujeito a um comentário escrito por parte da professora. A tarefa foi realizada em grupo no dia 16 de Novembro de 2011, tal como a primeira versão do relatório escrito. A segunda versão deste relatório, agora feita individualmente foi elaborada no dia 23 de Novembro de 2011 na aula de Matemática. Os discentes foram confrontados com o resultado final do seu primeiro relatório escrito, nomeadamente o fato de estar muito incompleto, apesar de lhes ter sido fornecido um guião. A opção da realização de uma nova tarefa e o seu respetivo relatório escrito deve-se à prática pouco comum destes alunos com este instrumento e com o ato de escrever o raciocínio. Depois de terem sido apresentadas oralmente as razões para ter considerado os relatórios incompletos, propus que fosse realizada uma nova tarefa para constatar se os alunos tinham percebido como se faz um relatório e o que lá deve constar. Com esta tarefa os alunos visualizaram uma figura onde tinham de identificar polígonos e classificá-los. Simultaneamente escreveram o relatório, com recurso novamente ao guião que já lhes tinha sido fornecido na tarefa 1. Na parte final deste relatório os alunos registaram as conclusões que tiraram com a realização da tarefa.

A tarefa 3 é uma tarefa de investigação que pretende desenvolver nos alunos a sua capacidade de comunicação matemática e a compreensão de sequências e regularidades (anexo 7). O objetivo da tarefa é permitir aos alunos determinar os termos seguintes da sequência e posteriormente termos variados e a sua lei de formação, utilizando a linguagem natural e simbólica. Para tal, contaram com a ajuda de materiais manipuláveis (palitos) e da máquina calculadora. A tarefa foi realizada em grupo na aula de matemática do dia 6 de Janeiro de 2012 e simultaneamente foi realizada a primeira versão do relatório escrito. A segunda versão do relatório foi realizada individualmente na aula de Matemática do dia 9 de Janeiro de 2012.

A tarefa 4 é uma tarefa que tem por base o Crivo de Eratóstenes e os números naturais (anexo 8). É uma tarefa exploratória em que se pretende que os alunos compreendam que os divisores de um número são divisores dos seus múltiplos e que os múltiplos de um número são múltiplos dos seus divisores. Também se pretende que os alunos identifiquem e deem exemplos de números primos e que façam a distinção entre números primos e compostos. Os alunos trabalharam com os múltiplos de 2,3,4,5,6 e 7 e, na parte final, é-lhes solicitado que expliquem por que razão o 90 e o 135 não são números primos. Nesta parte final pede-se que façam a explicação sem recurso ao Crivo de Eratóstenes. Esta tarefa foi realizada em grupo na aula de Matemática do dia 16 de Janeiro de 2012, tendo sido pedido que elaborassem em simultâneo o relatório escrito, seguindo a mesma estrutura das questões apresentadas no manual do aluno. A segunda versão do relatório foi feita individualmente no dia 18 de Janeiro de 2012.

A tarefa 5 é uma tarefa de caráter investigativo sobre o perímetro do círculo, que surge depois de já ter sido abordada a noção de perímetro com os polígonos (anexo 9). Os alunos já têm a noção de perímetro do círculo e o que se pretende é que estabeleçam a relação entre o perímetro do círculo e o seu diâmetro. Para tal, analisaram medidas de perímetro e de diâmetro de objetos circulares que foram registadas numa tabela. Esta tabela consta do enunciado fornecido aos alunos. Esta tarefa foi realizada em grupo na aula de Matemática do dia 7 de Março de 2012 e simultaneamente foi elaborado o respetivo relatório escrito na folha de enunciado. Depois de ter sido comentado por escrito pela professora e de lhes ter sido dado feedback oralmente, os alunos escreveram individualmente a segunda versão do relatório na aula de Matemática do dia 9 de Março de 2012.

Nas tarefas 1 e 2 os alunos leram individualmente os enunciados e posteriormente fizeram a leitura em voz alta para esclarecimento de dúvidas, sendo estas estritamente relacionadas com o enunciado, para não interferir com o trabalho a realizar pelos alunos. O mesmo não se verificou nas tarefas 3, 4 e 5, não tendo sido feita a leitura em voz alta do enunciado. Para apoio à realização do relatório escrito foi elaborado um guião que foi distribuído e discutido com os alunos. Em grande grupo, foi feita a leitura do guião com o objetivo de esclarecer qual a estrutura que o relatório deveria ter e quais os aspetos a serem focados. Os alunos realizaram a tarefa em grupo e a professora circulou pela sala enquanto os alunos trabalhavam, incentivando a discussão entre os vários elementos do grupo. Na mesma aula, os discentes elaboraram em grupo um relatório escrito sobre cada uma das tarefas, que foi entregue à professora para ser lido e comentado, sem ser sujeito a uma classificação. Posteriormente, na aula seguinte, esse relatório foi devolvido aos alunos que individualmente leram o feedback escrito da professora e fizeram a segunda versão do mesmo, ou seja, a versão final, para ser novamente devolvido à professora.

Recolha de dados

Neste estudo a recolha de dados teve início com a realização de um questionário (anexo 2) para caracterização da turma participante e continuou com a observação semanal dos três alunos selecionados. Para além disso a cada um dos alunos selecionados foi feita uma entrevista individual no início do estudo e após cada uma das tarefas, tendo sido também feita a recolha documental das duas versões dos seus relatórios escritos das tarefas.

Neste estudo a recolha de dados teve início com a realização de um questionário para caracterização da turma participante onde se pretende obter informações sobre a idade, o percurso escolar dos alunos, os passatempos e disciplinas preferidos, as características que consideram ser pontos fortes no seu papel de aluno, as dificuldades e se têm apoio na realização das tarefas fora da aula. Neste questionário também se pretende obter informações específicas sobre a disciplina de Matemática, ou seja, o que mais gostam e o que menos gostam, e se têm ou não dificuldades na compreensão dos enunciados, na resolução de problemas, na explicação do raciocínio, nos cálculos e medições e na avaliação dos trabalhos efetuados. A partir dos dados recolhidos no questionário e das notas de campo foram selecionados os três alunos participantes no estudo.

Após a seleção dos alunos participantes no estudo foi feito a cada um deles, individualmente, uma entrevista semiestruturada, que foi sustentada por um guião e registada em gravação áudio. Para além disso, após cada tarefa foi feita uma entrevista a cada um dos alunos individualmente, no sentido de clarificar o modo como procuram ultrapassar as suas dificuldades com a comunicação escrita matemática e compreender qual o significado que atribuem ao feedback fornecido. Esta técnica foi escolhida por ser uma das mais utilizadas na metodologia qualitativa, podendo ser complementada com dados recolhidos por observação porque "…a entrevista qualitativa permite, através de perguntas, penetrar no mundo do outro, nas coisas que não se podem observar diretamente (pensamentos, sensações, intenções) " (Abeledo,1989, p. 4). Durante as entrevistas procurei manter os entrevistados à vontade, interrompendo o seu discurso o mínimo possível (Bogdan & Biklen, 1994) e após a realização das mesmas foram feitas as respetivas transcrições e foram revistas as notas de campo.

Foi feita semanalmente a observação participante dos três alunos selecionados e foi complementada por notas de campo. Estes alunos estavam incluídos no mesmo grupo de trabalho, para que fosse possível obter a gravação áudio das aulas, pois "É fundamental que o entrevistador conheça em profundidade a subcultura do grupo a que pertence o entrevistado, para atuar adequadamente durante o processo de recolha de informação e posteriormente na interpretação da mesma" (Abeledo, 1989, p. 5).

Durante o primeiro e segundo períodos foi feita a recolha das duas versões de relatórios escritos dos alunos, resultantes de tarefas de natureza diversificada: problemas, tarefas investigativas e de exploração. Por se tratar de um instrumento de avaliação que não é familiar para os alunos foi dado a conhecer aos alunos as expectativas do professor e as razões da sua escolha e foi apresentado um guião que serviu de apoio à realização do relatório, onde é referido qual a estrutura que deverá ter e quais os critérios que serão utilizados na sua avaliação (Pinto & Santos, 2006). Com a utilização do guião pretendo que os alunos se apropriem dos critérios de avaliação e que melhorem a sua produção do relatório escrito, tal como é defendido por Semana (2008) e também que expliquem e justifiquem as opções tomadas para que seja privilegiado o desenvolvimento da sua comunicação escrita matemática.

Análise de dados

Nesta investigação foram analisados os dados recolhidos no questionário, os relatórios escritos produzidos no âmbito das tarefas 1,2,3,4 e 5, os dados registados no diário de bordo e as transcrições das entrevistas. Os dados do questionário foram analisados e complementados com dados recolhidos por observação para que fizesse a seleção dos alunos participantes. No questionário analisei aspetos gerais dos alunos, como a idade e retenções, mas também analisei os pontos fortes e as dificuldades assinalados por cada um deles, particularmente as dificuldades nas tarefas. Estes dados recolhidos no questionário em conjunto com uma ficha diagnóstico realizada no início do ano e também as informações fornecidas pelo diretor de turma serviram de base para caracterizar e selecionar cada um dos alunos participantes no estudo.

Para analisar o desenvolvimento da capacidade de comunicação matemática tenho por base os objetivos específicos que constam no Programa de Matemática do Ensino Básico (2007) e os respetivos tópicos: interpretação, representação, expressão e discussão. Assim, identificaram-se as dificuldades e estratégias utilizadas pelos alunos, a interpretação feita aos enunciados, as representações utilizadas, a colocação de dúvidas na discussão e também foi analisado se melhoraram ou não o relatório com o feedback. Os dados recolhidos foram organizados e subdivididos de forma a procurar regularidades (Bogdan & Biklen, 1994). No processo de apresentação dos dados recolhidos nos relatórios escritos há uma descrição e análise sobre a interpretação feita aos enunciados, as estratégias e representações utilizadas e a evolução da primeira para a segunda versão. Esta apresentação é feita para cada um dos alunos e foi subdividida por tarefas, onde é feita a triangulação com dados obtidos nas entrevistas e gravação áudio das respetivas aulas em que realizaram a tarefa e o relatório escrito.

Capítulo VI- Apresentação dos dados

Neste capítulo estuda-se o desenvolvimento da capacidade de comunicação escrita matemática de três alunos (Isabel, Filipe e Jéssica), no âmbito da implementação de relatórios escritos, que foram elaborados, numa primeira fase em grupo e depois sujeitos ao feedback escrito pela professora, para posteriormente serem aperfeiçoados individualmente.

Isabel

Apresentação

Este estudo foi realizado no ano letivo de 2011/2012 e a aluna Isabel tinha 10 anos e frequentava o 5.º ano de escolaridade, sem ter tido nenhuma retenção no seu percurso escolar. A Isabel era uma aluna simpática, mas tímida, e os seus passatempos favoritos eram a música e a internet, revelando também uma grande predisposição para o desporto, como vem evidenciado no questionário realizado no início da recolha de dados. A leitura é um dos passatempos que afirma ter menor preferência:

2- Qual o seu passatempo favorito? (Numere de 1 a 5, sendo o 1 correspondente ao passatempo com maior preferência)

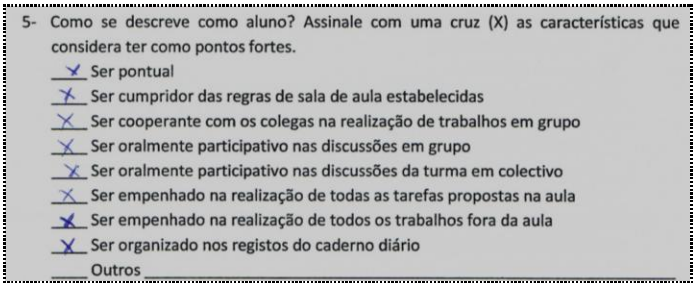
3 Desporto
2 Internet
6 Jogos
5 Leitura
1 Música
4 TV

Figura 3- Resposta à questão 2 do questionário (Isabel)

P- Qual é a disciplina que mais gostas?
I- Educação Física.
P- Porquê?
I- Porque eu gosto muito de ginástica, de fazer … (…)

(1ª Entrevista a Isabel em 17/10/11)

Quando questionada sobre os seus pontos fortes, a Isabel considera ser pontual, cumpridora das regras de sala de aula e empenhada na realização de todas as tarefas, dentro e fora da aula, tal como se encontra evidenciado na resposta dada à questão 5 do questionário:


5- Como se descreve como aluno? Assinale com uma cruz (X) as características que considera ter como pontos fortes.

X Ser pontual
X Ser cumpridor das regras de sala de aula estabelecidas
X Ser cooperante com os colegas na realização de trabalhos em grupo
X Ser oralmente participativo nas discussões em grupo
X Ser oralmente participativo nas discussões da turma em colectivo
X Ser empenhado na realização de todas as tarefas propostas na aula
X Ser empenhado na realização de todos os trabalhos fora da aula
X Ser organizado nos registos do caderno diário
___ Outros ___

Figura 4 - Resposta à questão 5 do questionário (Isabel)

Para além disso, considera ser cooperante com os colegas, ser participativa nas discussões de grupo ou discussões coletivas da turma e ser organizada nos registos do caderno diário. Todas estas caraterísticas foram também referidas pelo diretor de turma, tendo por base as informações recebidas pela professora do 1.ºciclo e foram observadas durante as aulas de Matemática.

A visão da matemática da Isabel resume-se a cálculos e medições, pois entende que têm a ver com a matemática as situações que envolvem cálculos e medições:

P - Ora eu queria só que me dissesses é dessas três situações quais é que achas que tem a ver com a matemática.
I - Aaa… a segunda.
P - Só a segunda? Todas?
I - E a primeira. A segunda e a primeira.
P - Porquê?
I - Porque na primeira é preciso fazer contas para organizar os carreiros de formigas …
P - Podes falar um bocadinho mais alto, se faz favor?
I - Porque na primeira é preciso fazer contas para organizar os carreiros das formigas e na segunda é com os comprimentos. Isso faz parte da matemática.

(1ª Entrevista a Isabel em 17/10/11)

Quando foi questionada na 1ªentrevista sobre a utilidade da matemática, a aluna referiu que é útil para a informática e para realizar as compras:

P - É útil para quê?
I - Para a informática, para… (…)
P - Só para a informática?
I - E para mais coisas.
P - Como por exemplo?
I - (…) Para saber os resultados quando por exemplo se vai ao supermercado, para saber a conta também tem de se usar matemática.

(1ª Entrevista a Isabel em 17/10/11)

A Isabel é uma aluna que gosta de Matemática, nomeadamente de resolver problemas e efetuar cálculos, tal como vem referido na resposta à questão 8 do questionário e é dito na sua 1ª entrevista:

> P- … Então e de Matemática gostas porquê?
> I- Porque gosto de fazer contas.
> (…)
> P- Então isso para ti era uma boa aula de Matemática? O que é que para ti tem de ser uma boa aula de Matemática?
> I- Como eu já disse, gosto muito de fazer problemas. Na escola primária, a professora, como sabia, fazia-me sempre problemas.
> P- E o que é que é mais importante nesta disciplina? Para ti (…) São os problemas?
> I- Sim
> P- Porquê?
> I- (…) Não sei explicar.
>
> (1ª Entrevista a Isabel em 17/10/11)

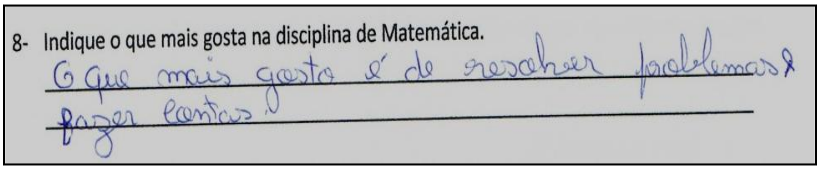

8- Indique o que mais gosta na disciplina de Matemática.
O que mais gosto é de resolver problemas & fazer contas.

Figura 5- Resposta à questão 8 do questionário (Isabel)

No entanto, apesar de gostar de efetuar cálculos, o que menos gosta na aula de Matemática são "as contas de dividir", tal como vem evidenciado na 1ª entrevista. Para além disso, de acordo com o que respondeu no questionário (questão 9) também não gosta de fazer as conversões de unidades de medida:

> P - Então e já me falaste no que é que mais gostas de fazer que são os problemas e os relatórios… Então e o que é que menos gostas de fazer?
> I - (…) Não gosto de fazer contas de dividir.
> P- Está bem. Não gostas de fazer porque não sabes ou porque não gostas mesmo?
> I - Porque não gosto mesmo.
>
> (1ª Entrevista a Isabel em 17/10/11)

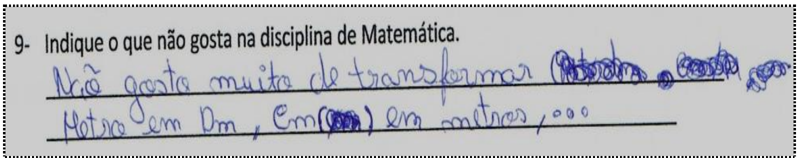

9- Indique o que não gosta na disciplina de Matemática.
Não gosto muito de transformar Metro em Dm, Cm em metros, ...

Figura 6- Resposta à questão 9 do questionário (Isabel)

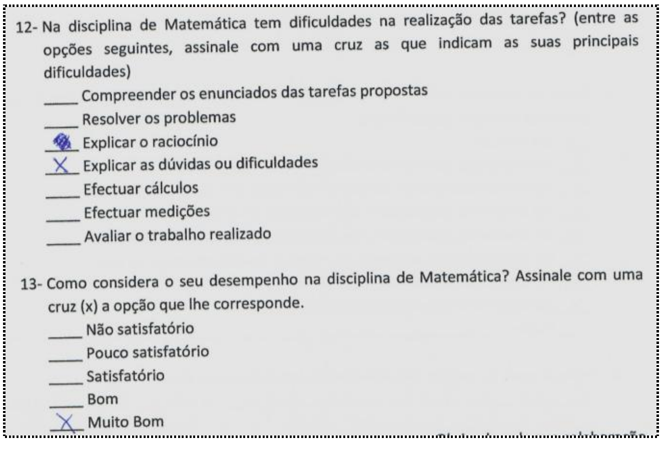
Na disciplina de Matemática, a Isabel tem preferência pela realização de problemas e considera que é importante o professor explicar e os alunos ouvirem atentamente o professor, para aplicarem o que aprenderam nos exercícios e problemas:

> P - A questão é se achas que é melhor quando a professora ensina a matéria e que os alunos aprendem aquilo que a professora está a dizer ou quando a matéria é aprendida logo pelos alunos e os alunos descobrem logo a matéria antes do professor ensinar?
> I - Depende, às vezes devem ser os alunos, outras vezes a professora.
> P - Então e qual o tipo de tarefas que mais gostas na aula. Já me falaste quando fazem o relatório não é?
> I - Gosto de resolver problemas.
> P - Então e se fosses professor de matemática, o que é que tu fazias para ajudar os alunos a aprenderem?
> I - Dava exercícios para ver no que é que eles tinham mais dúvidas. No que eles tinham mais dúvidas tentava explicar melhor para que eles percebessem.
>
> (1ª Entrevista a Isabel em 17/10/11)

Para além da resolução de problemas, a Isabel gosta das aulas em que têm de fazer relatórios escritos porque são solicitados em tarefas que envolvem maior reflexão e é necessário exemplificar o que se escreve:

> I - Gosto das aulas de fazer relatórios.
> P- Ai é? Porquê?
> I - Porque tem de se pensar e fazer vários exemplos das coisas.
>
> (1ª Entrevista a Isabel em 17/10/11)

Quando respondeu ao questionário (questão 13) sobre o seu desempenho na disciplina de Matemática, a aluna referiu que é muito bom, revelando autoconfiança. No entanto, referiu também que tem algumas dificuldades na explicação das suas dúvidas (questão 12 do questionário).


12- Na disciplina de Matemática tem dificuldades na realização das tarefas? (entre as opções seguintes, assinale com uma cruz as que indicam as suas principais dificuldades)
____ Compreender os enunciados das tarefas propostas
____ Resolver os problemas
____ Explicar o raciocínio
_X_ Explicar as dúvidas ou dificuldades
____ Efectuar cálculos
____ Efectuar medições
____ Avaliar o trabalho realizado

13- Como considera o seu desempenho na disciplina de Matemática? Assinale com uma cruz (x) a opção que lhe corresponde.
____ Não satisfatório
____ Pouco satisfatório
____ Satisfatório
____ Bom
_X_ Muito Bom

Figura 7- Resposta à questão 12 e 13 do questionário (Isabel)

Para além disso, quando sentia dúvidas na compreensão dos enunciados pedia a minha ajuda constantemente para voltar a ler e explicar o que era para fazer. Também pedia ajuda aos colegas quando necessário, mas só no caso de não ser possível falar comigo:

P - Então a professora é que resolve o problema ou és tu?
I - Eu, mas peço para tentar explicar melhor para eu entender.
P - Então, pedes ajuda à professora ou ao colega do lado também?
I - Se for preciso, se a professora tiver a fazer alguma coisa… peço ajuda.
(1ª Entrevista a Isabel em 17/10/11)

Enquanto aluna, outra das dificuldades que diz sentir é na realização dos trabalhos de casa e para superar essa dificuldade recorre à ajuda dos pais, tal como vem mencionado no questionário (questão 6) e é referido na 1.ªentrevista:

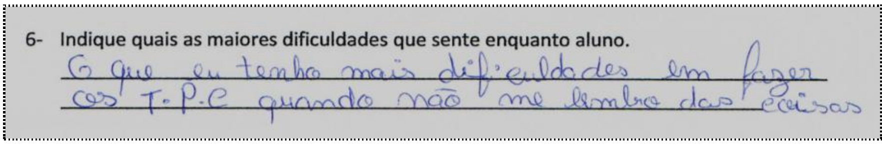

6- Indique quais as maiores dificuldades que sente enquanto aluno.
O que eu tenho mais dificuldades em fazer os T.P.C quando não me lembro das coisas

Figura 8- Resposta à questão 6 do questionário (Isabel)

P - Então e quando precisas de resolver um problema de matemática, qual é o tempo que achas que é necessário?
I - Depende do problema.
P - Sim? E quando não consegues resolver o que é que tu costumas fazer? O que é que se deve fazer?
I - Vou pedir ajuda aos meus pais para me tentarem explicar melhor.
P - Se for em casa, se for um problema que vá para casa. Mas, se for na aula?
I - Peço à professora para explicar melhor.

(1ª Entrevista a Isabel em 17/10/11)

Especificamente sobre a comunicação matemática, a aluna refere ter a preocupação de ler várias vezes o enunciado para tentar perceber o que tem de fazer, mas, apesar de não apresentar dificuldades na leitura, nem sempre compreende os enunciados, razão pela qual solicita a ajuda da professora ou dos colegas.

Nos relatórios escritos, no que diz respeito aos erros e dúvidas, a aluna diz ter a preocupação em confirmar os cálculos:

P- Não? E quando tens dificuldades nas tarefas o que é que costumas fazer? Ou quando fazes algum erro, tu dás conta que fizeste algum erro…
I- Tento corrigir…
P- Tentas corrigir. E como é que fazes isso?
I- Se for numa conta e vejo que está um erro vou fazer outra vez até que consiga… perceber se já está bem e quando faço alguma conta vou ver sempre duas vezes para ver se o resultado é mesmo aquele.

P- Hum, então vais confirmar?
I- Sim.

(1ª Entrevista a Isabel em 17/10/11)

No entanto, quando se trata de explicar o seu raciocínio, a Isabel tem algumas dificuldades e evita fazê-lo, pois nem sempre consegue dizer oralmente como pensou. Contudo, na sua opinião, não apresenta dificuldades na explicação do raciocínio, preferindo fazê-lo oralmente do que por escrito, por considerar ser para si mais fácil:

P - E para explicar o teu raciocínio quando resolves o problema?
I - Uso contas ou então palavras.
P - Contas? Ou palavras.
I - Sim.
P - E esquemas não?
I - Às vezes uso tabelas.
P - Tabelas. E tens dificuldade em explicar o teu raciocínio ou não?
I - Não
P - E o que é que é mais fácil para ti, explicar oralmente ou por escrito?
I - Oralmente.
P - Porquê?
I - Porque a escrever tem que se dar muitas palavras e oralmente é mais fácil dizer do que estar a escrever.

(1ª Entrevista a Isabel em 17/10/11)

A Isabel associa a avaliação a um somatório de procedimentos corretos e na disciplina de Matemática valoriza a avaliação que é dada à explicação do raciocínio:

P - Agora falando em avaliação. Quando se fala em avaliação qual é a primeira ideia que te vem logo à cabeça?
I - Notas…
P - Notas?
I - E também os certos.
P - Ai é? E para que é que tu achas que serve a avaliação? Na tua opinião, para que serve a avaliação?
I - Para que os professores tentem ver o que é que os alunos sabem. (…)
P - Então e na disciplina de Matemática, o que é que deve ser valorizado? O que é que deve ter maior peso na avaliação?
I - A maneira como se explica, como se fez.
P - Como se fez? A maneira como se explica o raciocínio?
I - Sim.

(1ª Entrevista a Isabel em 17/10/11)

Relatórios escritos

Tarefa 1

Durante a realização da tarefa 1 (anexo 5), a Isabel trabalhou quase sempre individualmente, embora pontualmente tenha trocado informações com a Jéssica. No entanto, oralmente não houve grande interação, pois as pequenas interações que tiveram foram feitas por troca de papéis e visualização dos rascunhos dos colegas para ver se tinham descoberto alguma possibilidade diferente de pintar a figura.

Foi solicitado pela professora que no relatório escrito não incluíssem apenas os resultados, mas também as estratégias que utilizaram para encontrar as diferentes formas de pintar a figura. Apesar de alguns alertas dados pela professora, o grupo não soube gerir o tempo disponível e não houve partilha de ideias oralmente. No entanto, quando a aluna foi questionada sobre o funcionamento do grupo, esta respondeu que o grupo tinha funcionado bem:

> P - Então e o trabalho de grupo funcionou bem?
> I - Hum, hum.
> P- E como é que fizeram? Dividiram tarefas ou…
> I - Não, fizemos todos juntos.
>
> (Entrevista a Isabel após a tarefa "Quadrados" em 28/10/11)

Interpretação feita ao enunciado

A Isabel leu e interpretou o enunciado, percebendo claramente que na primeira parte tinha de descobrir as maneiras diferentes de colorir a figura utilizando uma só cor e de descrever o critério que utilizou.

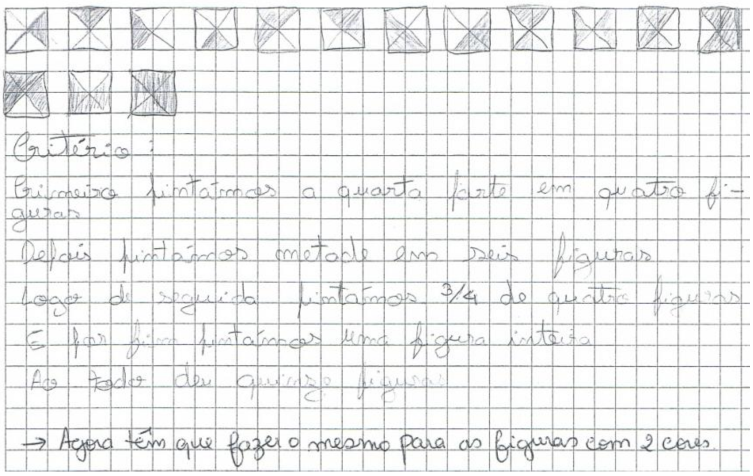


Figura 9 - 1ª versão do relatório escrito da tarefa "Quadrados"

Apesar de todos os elementos do grupo terem o guião e de o terem lido várias vezes, a Isabel não incluiu no relatório uma estratégia sobre como pintar a figura utilizando duas cores, apesar de constar no enunciado da tarefa que o devia fazer. Houve dificuldade na gestão do tempo disponível para a realização do relatório em grupo, pois levaram algum tempo a perceber o que tinham de fazer. Foi necessário lerem várias vezes o guião, uma vez que se tratava da primeira vez que faziam um relatório, o que lhes tirou tempo para a elaboração do mesmo e também porque foram fazendo o relatório à medida que foram realizando a tarefa. Para além do guião para elaboração do relatório não utilizaram mais nenhum recurso:

> P - Hum, então e depois para fazer o relatório? Onde é que vocês foram buscar a informação? Vocês também tinham… (aponta para o guião). Utilizaram isto ou não?
> I - Utilizámos.
> P - Ah, e isto é o quê?
> I - É como se faz um relatório.
> P - E vocês utilizaram a informação toda que está aí ou só utilizaram uma parte?
> I - Lemos e depois fomos fazendo e se tivéssemos dúvidas vínhamos ler outra vez.
> (Entrevista a Isabel após a tarefa "Quadrados" em 28/10/11)

Estratégias utilizadas

Ao analisar as duas versões escritas da Isabel é possível verificar que quando foi utilizada apenas uma cor, a aluna observou a figura e viu-a como uma unidade dividida em 4 partes e tomou como estratégia pintar uma parte em posições diferentes, depois duas partes em posições diferentes e assim sucessivamente até a figura estar toda pintada. Na primeira versão, a aluna entregou o relatório incompleto, tendo apenas verificado com uma cor de quantas maneiras diferentes é possível pintar a figura. Apresenta uma estratégia e consegue determinar o número de possibilidades, mas no entanto, não o faz com as duas cores. Utiliza como estratégia o desenho da figura e parte do princípio que o quadrado é uma unidade e pintou a quarta-parte de maneiras diferentes, depois metade, depois os ¾ e a unidade:

> I - Fomos desenhando as figuras e pintando e vendo as partes que estavam pintadas.
> P - Portanto, não foram procurar em mais sítio nenhum, a não ser aquilo que já se lembravam…
> I - Sim.
> (Entrevista a Isabel após a tarefa "Quadrados" em 28/10/11)

Para se expressar, utilizou a representação pictórica, pois desenhou as figuras e as várias possibilidades. Ao escrever a sua estratégia, a aluna utilizou a representação verbal e simbólica, pois exprimiu-se por palavras como “quarta-parte” e “metade” , mas também utilizou a notação simbólica para fração quando diz que pintou ¾ da figura. Quando se tratou de utilizar duas cores, a Isabel utilizou novamente a representação pictórica quando desenhou as possibilidades que encontrou e utilizou também a representação verbal para expressar a sua estratégia.

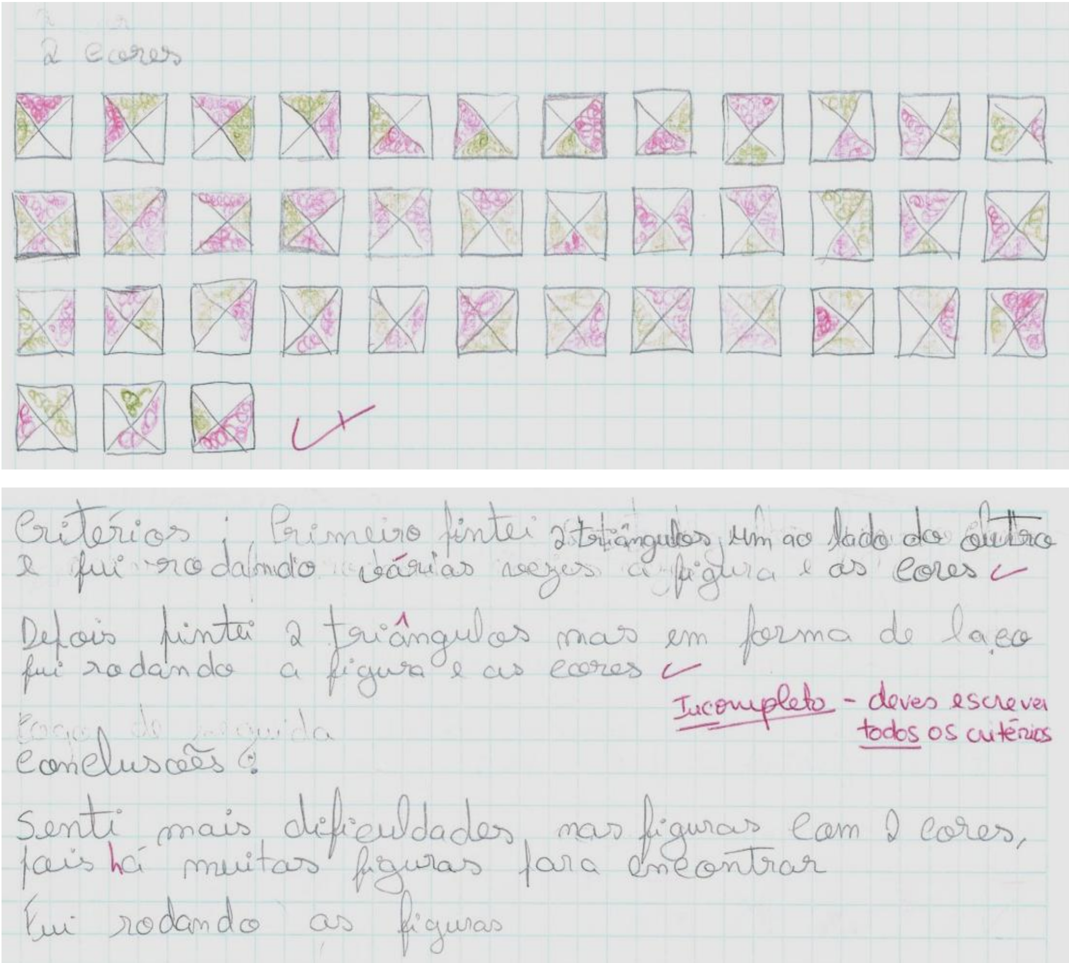


Figura 10- 2ª versão do relatório escrito da tarefa “Quadrados”

No caso em que era pedido para utilizar uma cor conseguiu determinar todas as possibilidades, mas no entanto, no caso em que era pedido para utilizar duas cores não o conseguiu fazer. Nesta parte do relatório consegue fazer uma previsão de que é possível pintar de mais maneiras, fundamentando com o desenho de 39 maneiras diferentes, mas não tentou sistematizar os dados nem averiguar todas as possibilidades. Quando foi questionada sobre a realização da tarefa e a elaboração do relatório escrito, a aluna fez referência à utilização do guião, mas verifica-se que as conclusões escritas estão incompletas. A Isabel não consegue dizer o que aprendeu com a tarefa, mas consegue perceber que com duas cores é possível pintar a figura de mais maneiras do que só com uma cor. Refere que aprendeu a pintar a figura de várias maneiras, mas não descreve como:

> P - E o que é que aprendeste com a tarefa?
> I - Que com várias cores dava para pintar várias figuras.
> P - De mais maneiras ou de menos maneiras do que com uma cor?
> I - De várias maneiras…
> P - Sim, mas com duas cores… conseguias pintar de mais maneiras ou de menos maneiras do que com uma cor?
> I - De mais maneiras.
> (Entrevista a Isabel após a tarefa "Quadrados" em 28/10/11)

Apesar de ter escrito a estratégia que utilizaram para pintar a figura com uma só cor, quando se tratou de utilizar duas cores iniciou uma explicação, mas apenas para as figuras que desenhou na primeira linha. Esta dificuldade em encontrar todas as possibilidades consta no relatório, pois tem noção de que ainda poderia fazer de mais formas diferentes. No entanto, não as desenhou, nem escreveu como as poderia determinar. Para além disso, apesar destas dificuldades, a aluna não participou ativamente nas discussões da turma e não apresentou dúvidas ou questões aos colegas.

Evolução da primeira para a segunda versão

No feedback que dei a este relatório optei por encaminhar para a sua conclusão e reforcei que o que tinham feito estava bem feito (figura 9). Na segunda versão a aluna copiou o que tinha feito na 1ª versão do relatório e acrescentou a parte sobre as duas cores, onde inicia a estratégia, mas não continua e desiste. Limitou-se a fundamentar que é possível de mais maneiras e não tenta perceber quantas, nem se há uma estratégia que possibilite a explicação. Não apresentou todas as hipóteses e escreveu como dificuldade sentida não ter conseguido descobrir todas as possibilidades, prevendo que há mais do que as que apresentou. Continuou a utilizar a representação pictórica e a representação verbal, mas, ao contrário da primeira parte do relatório, apenas utilizou a representação simbólica para escrever o número 2.

Tarefa 2

Nesta tarefa (cujo enunciado se encontra no anexo 6) os alunos já foram trocando algumas informações oralmente, embora ainda com pouca frequência. Apesar de os alunos não falarem foi possível observar que olhavam para os rascunhos dos colegas para confirmar se estava parecido com o seu trabalho. O relatório escrito que foi elaborado em grupo já respeita a estrutura indicada no guião, ou seja apresenta uma introdução, desenvolvimento e conclusões e a Isabel considera que o grupo funcionou bem.

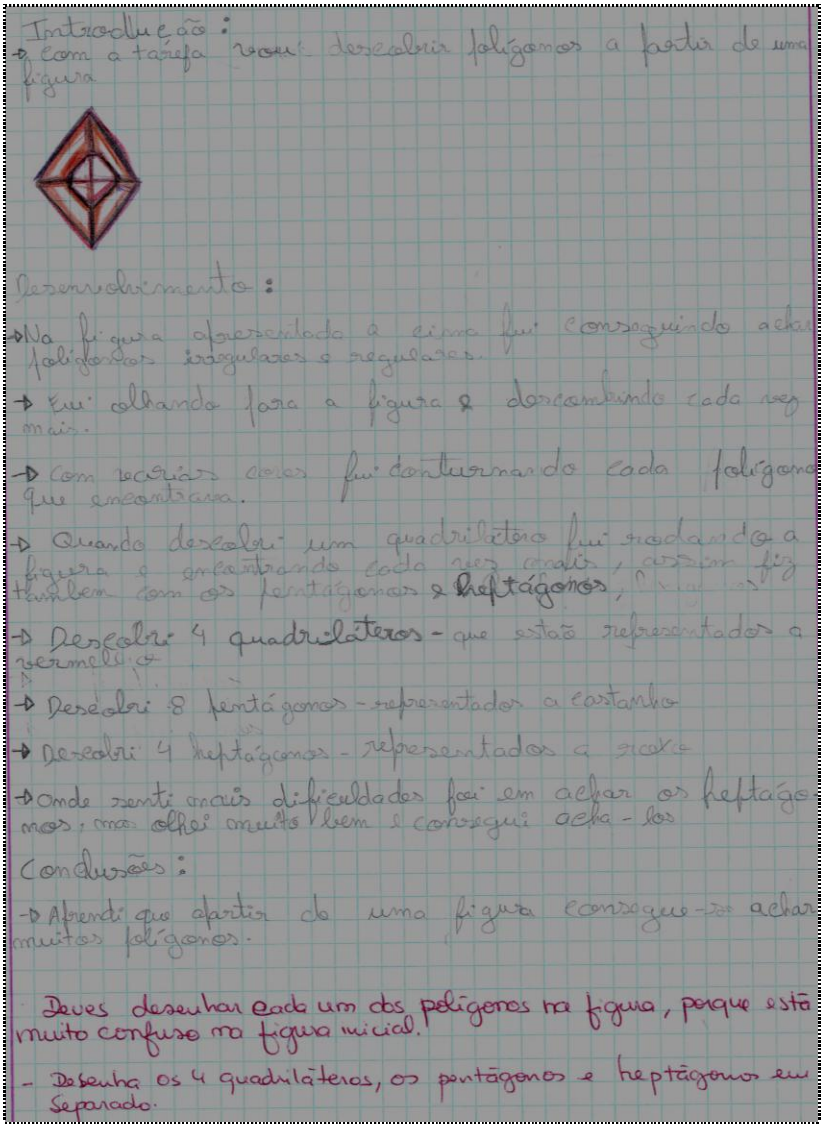
> P- E o trabalho de grupo funcionou bem ou não?
> In- Funcionou.
> (Entrevista a Isabel após a tarefa "Polígonos" em 17/11/2011)

Interpretação feita ao enunciado

A Isabel leu e interpretou o enunciado da tarefa percebendo claramente que era necessário descobrir e classificar polígonos na figura inicial, tal como descrever a estratégia que utilizaram.

Nesta tarefa o grupo voltou a utilizar o guião de elaboração do relatório e ao ser questionada sobre a tarefa a Isabel refere que o utilizou, mas também menciona o livro como instrumento de pesquisa sobre os nomes dos polígonos.

> P- Tá aqui com muitas cores. Então e o que é que vocês foram fazer aqui? Portanto, fizeram o desenvolvimento… então e para fazerem o desenvolvimento escreveram os nomes dos polígonos que encontraram… onde é que foram buscar esta informação?
> I- Lemos aquele… Nessa segunda também lemos aquele…
> P- Leram aquele o quê, o guião?
> I- Sim.
> P- E o livro? Não utilizaram?
> I- Sim. Este exercício era do livro.
> (…)
> P- Os nomes dos polígonos, por exemplo, onde é que vocês foram procurar?
> In- Ah, fomos procurar ao livro… alguns
> P- Vocês foram procurar alguns ao livro não é?
> In- Sim.
>
> (Entrevista a Isabel após a tarefa "Polígonos" em 17/11/2011)



Introdução:

-> Com a tarefa vou descobrir poligonos a partir de uma figura

Desenvolvimento:

-> Na figura apresentada a cima fui conseguindo achar poligonos irregulares e regulares.

-> Eu olhando para a figura e descombrindo cada vez mais.

-> Com várias cores fui contuarnando cada poligono que encontrava.

-> Quando descobri um quadrilátero fui rodando a figura e encontrando cada vez mais, assim fiz também com os pentágonos e heptágonos,

-> Descobri 4 quadriláteros - que estão representados a vermelho

-> Descobri 8 pentágonos - representados a castanho

-> Descobri 4 heptágonos - representados a preto

-> Onde senti mais dificuldades foi em achar os heptágonos, mas olhei muito bem e consegui acha-los

Conclusões:

-> Aprendi que apartir de uma figura consegue-se achar muitos polígonos.

Deves desenhar cada um dos polígonos na figura, porque está muito confuso na figura inicial.

- Desenha os 4 quadriláteros, os pentágonos e heptágonos em separado.

Figura 11- 1ª versão do relatório escrito da tarefa “Polígonos”

Estratégias utilizadas

Ao analisar as duas versões escritas da Isabel é possível verificar que a aluna descreve o que fez, ou seja, contorna cada polígono à medida que o vai encontrando e verbalmente apresenta uma estratégia que envolve a descoberta do mesmo polígono por rotação. Na primeira versão, a aluna escreveu corretamente o nome dos polígonos encontrados no relatório, mas não conseguiu organizar os registos, pois utilizou várias cores na mesma figura inicial para localizar os polígonos encontrados:

> I- Tínhamos uma figura e dentro dessa figura tínhamos de descobrir vários polígonos.
> P- Tinham que identificar, não é?
> I- Sim.
> P- Então e para identificar, o que é que vocês fizeram?

> I- Dividimos… vimos os polígonos.
> P- Aqui neste caso a figura está com quê? Com cores…
> I- A mais.
> (Entrevista a Isabel após a tarefa "Polígonos" em 17/11/2011)

Na segunda versão consegue melhorar a organização do relatório separando as figuras encontradas. Para se expressar utilizou a representação pictórica ao desenhar as figuras que encontrou e complementou a resposta com a explicação verbal sobre a rotação dos polígonos. Consegue assim representar a ideia de rotação de duas formas diferentes, tal como se encontra evidenciado na figura 11.

A Isabel não escreveu as dificuldades sentidas na elaboração deste relatório e quando foi questionada sobre o assunto na entrevista refere que não as teve:

> P- Queres dizer alguma coisa que te tenha chamado à atenção nesta tarefa?
> I- Não.
> P- Alguma coisa em especial? Alguma dificuldade que tiveste?
> I- Não.
> (Entrevista a Isabel após a tarefa "Polígonos" em 17/11/2011)

No entanto, durante essa mesma entrevista a aluna detetou a falha a nível da organização do relatório quando foi questionada sobre a estratégia utilizada para encontrar polígonos:

> P- Aaa… Então e a partir desta figura diz-me lá, quantas possibilidades existiam aqui de encontrar figuras? De encontrar aqui polígonos?
> I- 10
> P- Só?
> I- aaa…
> P- Pois realmente, o que é que tu achas desta figura, achas que ficou percetível para quem está a ler?
> I- Não.
> (Entrevista a Isabel após a tarefa "Polígonos" em 17/11/2011)

Nesta fase, a Isabel conseguiu olhar novamente para a figura e viu que não foi clara porque desenhou-os todos na mesma figura inicial e pintou-os com cores diferentes, tendo dificuldade em visualizar as figuras que tinha encontrado anteriormente.

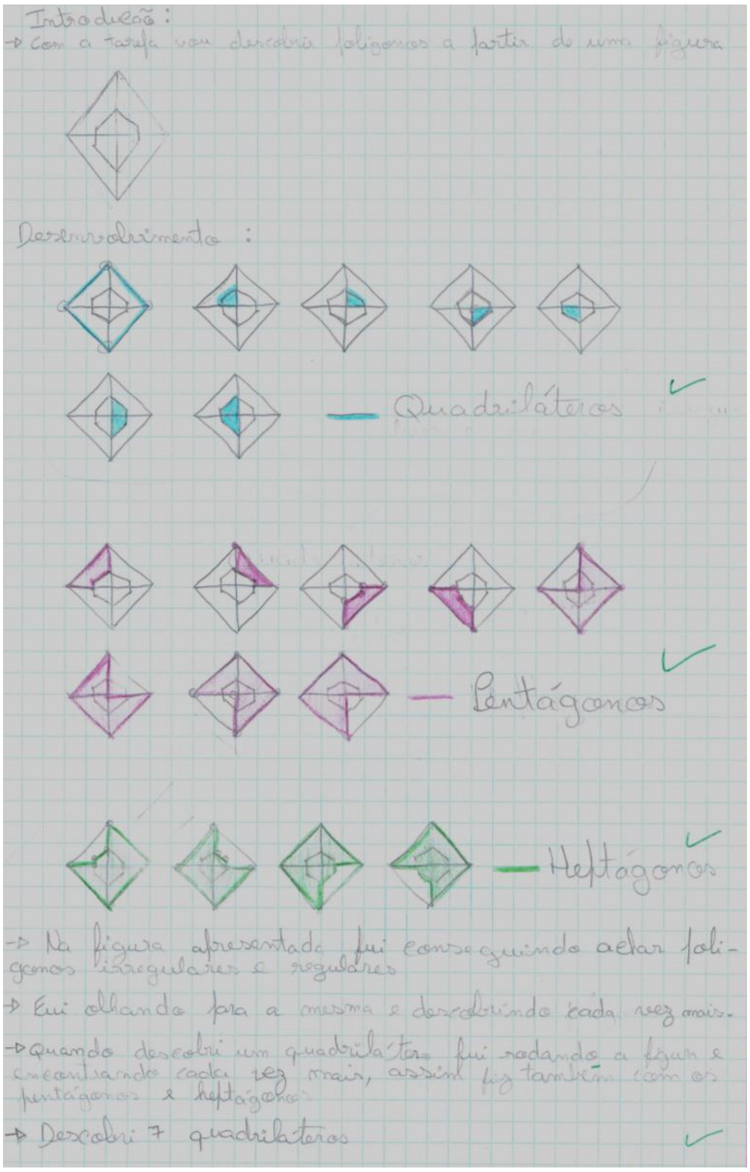


Figura 12 - 2ª versão do relatório escrito da tarefa "Polígonos"

Na segunda versão percebeu que tinha que desenhar várias vezes a figura inicial e pintar o polígono encontrado para não estar confuso para quem lê e que tinha de fazer corresponder a cada uma delas o nome do polígono.

Evolução da primeira para a segunda versão

No feedback que dei a este relatório optei por sugerir o desenho dos diversos polígonos em separado (figura 11) porque a figura estava confusa e sem fazer a correspondência com os polígonos encontrados e escritos. Na segunda versão, a aluna para além de os desenhar em separado, também ilustrou a rotação dos polígonos que já tinha referido verbalmente na primeira versão. Há assim uma evolução da primeira para a segunda versão porque conseguiu estabelecer uma correspondência entre a representação pictórica e a representação verbal. Para além disso, também conseguiu encontrar mais quadriláteros do que na primeira versão, tal como se encontra evidenciado na figura 12.

Tarefa 3

Esta tarefa (que consta no anexo7) foi realizada em grupo e os alunos já trocaram mais ideias. Só fizeram a construção com palitos até à figura número 13 porque logo no início o Filipe alertou logo o grupo para uma regularidade e a Isabel propôs que fizessem uma tabela, que foi utilizada para organizar os dados e verificar se o que o Filipe tinha dito estava ou não correto.

> F - anda de 4 em 4 (diz em surdina).
> I- Vamos fazer uma tabela.
> F- Eu tenho régua. E vamos fazer a lápis? (…)Ah, vais ter que fazer a tabela e agora ia dizer-te régua…
> F- não, deixa estar… é de 4 em 4 não é?(…) 11,12,13,14,15,16… afinal é de 4 em 4.
>
> (Gravação da aula da tarefa “Fósforos” em 04/01/2012)

Interpretação feita ao enunciado

A Isabel leu e interpretou o enunciado percebendo que era necessário determinar vários termos da sequência para posteriormente escrever a sua lei de formação e que era vantajoso organizar os dados numa tabela para posteriormente serem analisados.

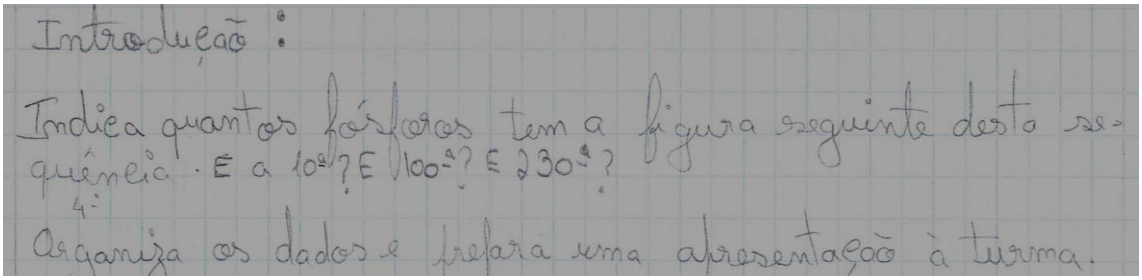
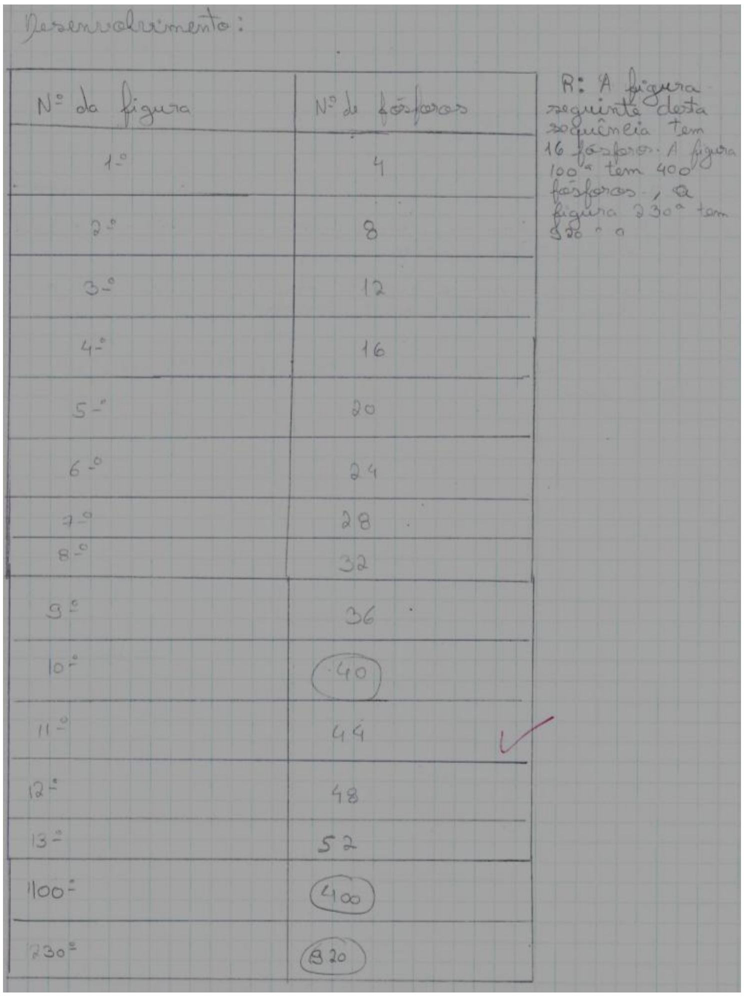

Introdução:
Indica quantos fósforos tem a figura seguinte desta sequência. E a 10ª? E 100ª? E 230ª?
4ª
Organiza os dados e prepara uma apresentação à turma.

Figura 13- Introdução da 1ª versão do relatório escrito da tarefa “Fósforos”

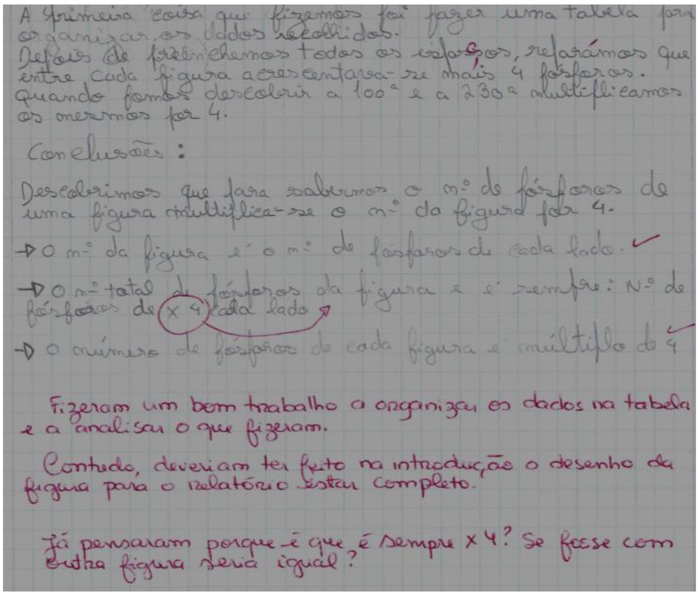


Desenvolvimento:

Nº da figura	Nº de fósforos
1º	4
2º	8
3º	12
4º	16
5º	20
6º	24
7º	28
8º	32
9º	36
10º	40
11º	44
12º	48
13º	52
100º	400
230º	920

R: A figura seguinte desta sequência tem 16 fósforos. A figura 100ª tem 400 fósforos, a figura 230ª tem 920 - a

Figura 14- 1ª versão do relatório escrito da tarefa "Fósforos"



A primeira coisa que fizemos foi fazer uma tabela para organizar os dados recolhidos. Depois de preenchermos todos os espaços, reparámos que entre cada figura acrescentava-se mais 4 fósforos. Quando fomos descobrir a 100ª e a 230ª multiplicamos os mesmos por 4.

Conclusões:

Descobrimos que para sabermos o nº de fósforos de uma figura multiplica-se o nº da figura por 4.

→ O nº da figura é o nº de fósforos de cada lado.

→ O nº total de fósforos da figura é sempre: Nº de fósforos de (× 4) cada lado

→ O número de fósforos de cada figura é múltiplo de 4

Fizeram um bom trabalho a organizar os dados na tabela e a analisar o que fizeram.

Contudo, deveriam ter feito na introdução o desenho da figura para o relatório estar completo.

Já pensaram porque é que é sempre × 4? Se fosse com outra figura seria igual?

Figura 15- Continuação da 1ª versão do relatório escrito da tarefa "Fósforos"

Neste relatório escrito mantém a estrutura definida no guião, ou seja, inicia com uma introdução, faz o desenvolvimento e posteriormente escreve algumas conjeturas. Apesar de escrever algumas conjeturas, em alguns casos não dá exemplos, o que se pode verificar na figura 15.

Estratégias utilizadas

Ao analisar as duas versões escritas da Isabel é possível verificar que apenas construíram algumas figuras e rapidamente se aperceberam que se tratavam de múltiplos de 4. Quando questionada sobre o que fizeram durante a tarefa a Isabel refere que apenas construíram as figuras até à figura número 13, porque a partir daí foram apenas verificar se a regularidade que tinham encontrado era válida e avançaram para números superiores.

> P- Então, basicamente o que é que vocês fizeram? Foram experimentar… Fizeram todas as figuras?
> I- Não.
> P- Só fizeram algumas?
> I- Fizemos até ao 13 e a partir daí quando percebemos o que acontecia em cada figura, experimentámos logo para as outras mais.
> P- Para as outras maiores. Então, o que é que vocês perceberam que começava a acontecer?
> I- Andava de 4 em 4.
> (Entrevista a Isabel após a tarefa "Fósforos" em 06/01/2012)

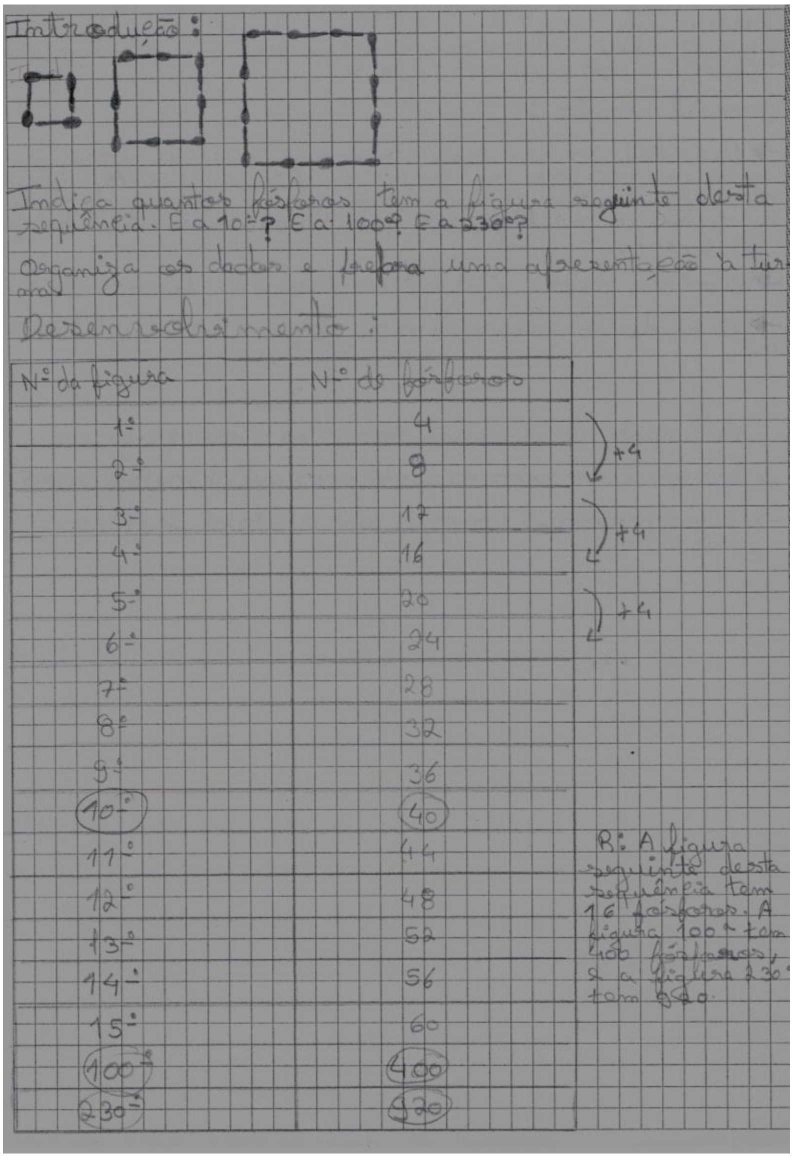
A aluna foi ajudando os colegas durante a realização da tarefa, pois dominava a tabuada do 4, ao contrário do Filipe. Por dominar a tabuada apercebeu-se rapidamente que realmente eram múltiplos de 4 quando chegou à figura número 10 e assinalou, rodeando o número e de seguida fez o mesmo para a figura número 100. Para a figura número 230 utilizou a calculadora e voltou a verificar que era um múltiplo de 4.

> F – É de 4 em 4 não é?
> I- É. 4,8,16,sim.
> F- Quem é que sabe a tabuada do 4?
> I- 44, 48, 52, 56, 60
> F- I… olha lá o penúltimo…
> J- oh!… (e altera o que escreveu)
> F- 420, não. É o número de quê, de palitos?
> I- Olha, o 10 tem 40, …
> (Gravação da aula da tarefa "Fósforos" em 04/01/2012)

A aluna explica como é que perceberam que eram múltiplos de 4, referindo que à medida que foi preenchendo a tabela foi percebendo que se tratavam de múltiplos de 4. Ao tomar a figura 10 e 100 como referência, rodeou os números, e a partir daí conseguiu encontrar o número de palitos para qualquer figura da sequência. Faz a explicação do processo por escrito, pois diz que começou por verificar que se acrescentava sempre mais 4 fósforos e depois foram verificar para figuras maiores, como por exemplo a 100ª figura. Na primeira versão não justifica por que razão se tratam de múltiplos de 4, mas após a leitura do feedback escreve na segunda versão do relatório que são múltiplos de 4 porque a figura inicial tem 4 lados e se esta figura "fosse um pentágono aí teria de multiplicar por 5, se fosse um hexágono por 6…". No entanto não apresenta exemplos que validem a sua afirmação.

A Isabel utilizou a representação pictórica nas figuras da sequência e para escrever a lei de formação da sequência utilizou a representação verbal e a simbólica. A aluna escreve que o número de fósforos de cada figura é um múltiplo de 4, mas também entende que é sempre o quadruplo do número de fósforos de cada lado e utiliza a representação simbólica quando escreve"X4":

> P- Hum, isso quer dizer que era o quê? Estes números aqui como é que se chamam? Vocês depois tiveram que ir buscar informação para escrever isto. Não foi? Essa informação que depois vocês escreveram aqui… se anda sempre de 4 em 4 não é? Ou seja, até escreveram aqui que é vezes…
> I- 4
> P- Vezes 4. Então como é que se chamam números… que se multiplicam por 4?
> (…)
> P- Isso tem um nome.
> I- Quadruplo
> P- Quadruplo, eles são o quadruplo, mas neste caso a figura número 1 …era sempre…, era vezes 4, a figura número 2…
> I- Vezes 4.
> P- Vezes 4, não é? Então neste caso seriam o quê, múltiplos…
> I- de 4.
> (Entrevista a Isabel após a tarefa "Fósforos" em 06/01/2012)



Introdução:

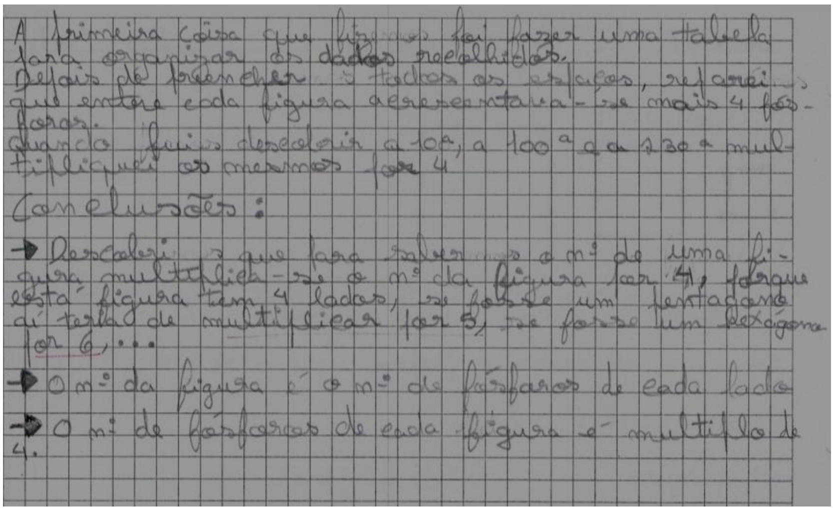
Indica quantos fósforos tem a figura seguinte desta sequência. E a 10ª? E a 100ª? E a 230ª?

Organiza os dados e prepara uma apresentação à turma.

Desenvolvimento:

Nº da figura	Nº de fósforos	
1º	4	
2º	8	+4
3º	12	
4º	16	+4
5º	20	
6º	24	+4
7º	28	
8º	32	
9º	36	
10º	40	
11º	44	
12º	48	
13º	52	
14º	56	
15º	60	
100º	400	
230º	920	

R: A figura seguinte desta sequência tem 16 fósforos. A figura 100ª tem 400 fósforos, e a figura 230ª tem 920.



A primeira coisa que fizemos foi fazer uma tabela para organizar os dados recolhidos.
Depois de preencher todos os espaços, reparei que entre cada figura acrescentava-se mais 4 fósforos.
Quando fui descobrir a 10ª, a 100ª e a 230ª multipliquei os mesmos por 4

Conclusões:

→ Descobri que para saber o nº de uma figura multiplica-se o nº da figura por 4, porque esta figura tem 4 lados, se fosse um pentágono aí teria de multiplicar por 5, se fosse um hexágono por 6,...

→ O nº da figura é o nº de fósforos de cada lado

→ O nº de fósforos de cada figura é múltiplo de 4.

Figura 16 - 2ª versão do relatório escrito sobre a tarefa “Fósforos”

Evolução da primeira para a segunda versão

No feedback que dei a esta primeira versão do relatório escrito (figura 15) procurei que a Isabel refletisse sobre a razão de serem múltiplos de 4. Durante a entrevista voltei a questionar a aluna sobre a razão de ter escrito que era sempre "X4".

> P- E mais? Ah e já pensaste porque é que é sempre um número vezes 4? Porque é que é vezes 4?
> P- Porque é que nesta sequência é sempre vezes 4?
> I- É sempre o número da figura vezes 4.
> P- Porque é que é vezes 4 e não é vezes 5 ou vezes 6? Já pensaste porquê?
> I- Porque a primeira figura começava por 4.
> P- Então e a primeira figura, que começa com 4, como é que se chama esta figura?
> I- Quadrado.
> P- E isso tem alguma coisa a ver com o 4?
> I- Tem.
> P- O que é que tem a ver com o 4?
> I- O quadrado tem 4 lados.
> P- Então, se esta mesma tarefa tivesse sido feita com uma sequência a começar num pentágono o que é que tu achas que iria ser… o que é que iria acontecer aqui nos números de fósforos? Ou de palitos? Seria o quê?
> I- Era de 5 em 5.
> P- 5 em 5? Se fosse um pentágono regular, não é?
> I- Sim.
>
> (Entrevista a Isabel após a tarefa "Fósforos" em 06/01/2012)

Na segunda versão feita individualmente a Isabel já desenhou na introdução a sequência inicial, completando o relatório anterior, e manteve no desenvolvimento a tabela já feita na versão anterior, mas já assinalou que andava de 4 em 4. Para além disso, a aluna consegue fazer uma conjetura sobre a sequência, nomeadamente que se trata de múltiplos de 4 e explica que tal fato acontece por se tratar de um quadrado e ter 4 lados e que se a sequência tivesse início com um pentágono seriam múltiplos de 5 e se fosse um hexágono seriam múltiplos de 6. Deste modo, associou o número de lados da figura inicial da sequência ao número que se tinha de multiplicar o número da figura, conseguindo generalizar a qualquer polígono regular. No entanto, apesar de ter mencionando na segunda versão esta relação entre a figura inicial e a lei de formação da sequência, não dá exemplos que validem a sua afirmação (figura 16).

Tarefa 4

A tarefa (que consta no anexo 8) foi realizada em grupo e a estrutura do relatório escrito teve como orientação as questões do manual. Os alunos fizeram a tarefa em grupo, mas não partilharam oralmente a informação, existindo apenas partilha de informação por observação dos rascunhos dos colegas do grupo. A aluna não participou ativamente nas discussões da turma e não apresentou dúvidas ou questões no grupo.

Interpretação feita ao enunciado

A Isabel leu e interpretou o enunciado, percebendo que era necessário organizar os múltiplos por cores. Por este motivo, em vez de ir simplesmente riscando os múltiplos à medida que os foi encontrando a aluna fez uma legenda onde a cada cor corresponde um determinado múltiplo.

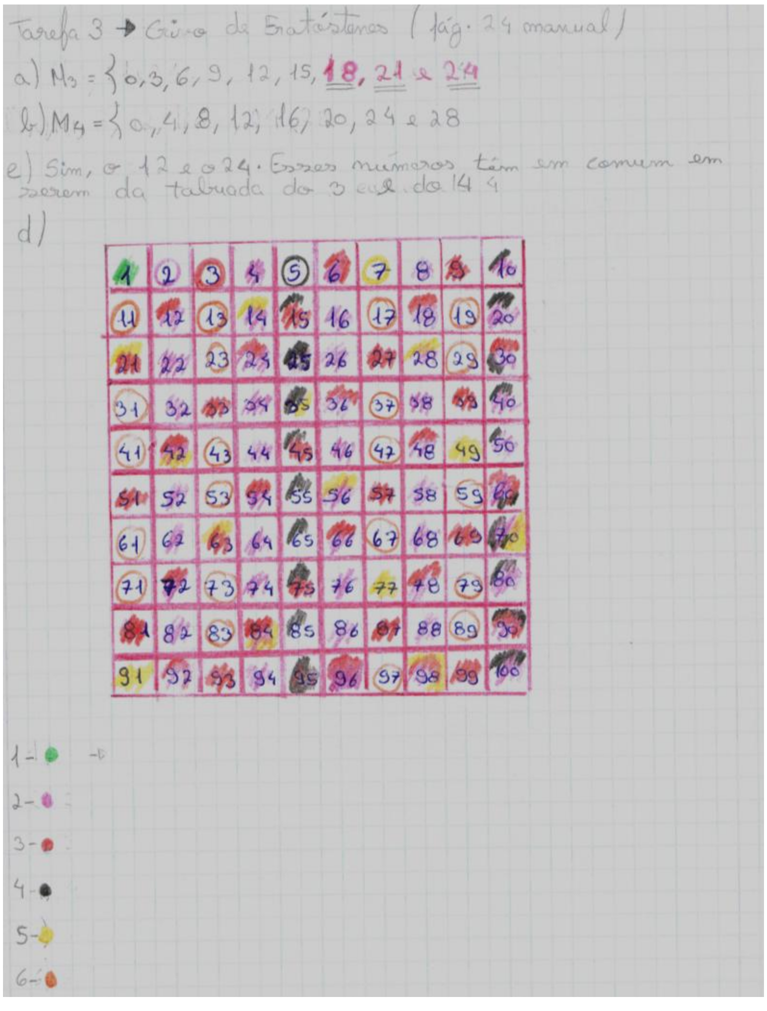


Figura 17- 1ª versão do relatório escrito da tarefa “Crivo de Eratóstenes”

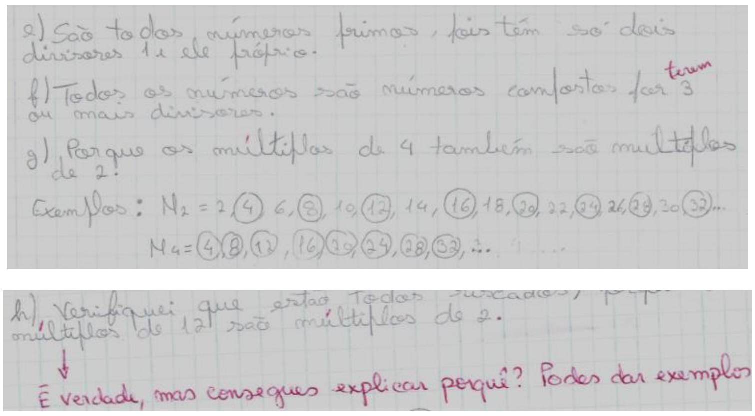

e) São todos números primos, pois têm só dois divisores 1 e ele próprio.
f) Todos os números são números compostos por terem 3 ou mais divisores.
g) Porque os múltiplos de 4 também são múltiplos de 2.
Exemplos: M_2 = 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32...
M_4 = 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, ...
h) Verifiquei que estão todos riscados, porque múltiplos de 12 são múltiplos de 2.
É verdade, mas consegues explicar porquê? Podes dar exemplos

Figura 18–Continuação da1ª versão do relatório escrito da tarefa “Crivo de Eratóstenes”

Durante a realização da tarefa, apesar de terem o livro à sua disposição, os alunos preferiram perguntar-me o que são números primos, razão pela qual sugeri a consulta do manual onde leram a definição de número primo.

Estratégias utilizadas

Ao analisar as duas versões escritas da Isabel é possível verificar que a aluna organizou os dados por cores, consoante os múltiplos que foi encontrando. A Isabel rodeou os números 2,3,5 e 7 e organizou os múltiplos por cores. Na resposta à alínea e, onde se pretendia que explicasse o que os números que estão rodeados têm em comum a aluna deu a resposta com base na informação que foi pesquisar no manual, ou seja, na definição de número primo e escreveu que estes números “têm só 2 divisores, 1 e ele próprio” (figura 18). Contudo, não apresentou exemplos que validem a sua afirmação.

Na alínea f, em que tinha de justificar por que razão os números riscados não são primos, escreveu apenas que são “compostos por terem 3 ou mais divisores”. Neste caso baseou-se na definição de número composto, mas não deu exemplos para complementar a sua resposta. Na alínea g, em que tinham de explicar por que razão não era necessário riscar o 4 e todos os seus múltiplos, a Isabel escreveu que “os múltiplos de 4 também são múltiplos de 2” e, ao contrário do que fez anteriormente, deu exemplos de múltiplos de 2 e de 4 rodeando os múltiplos comuns. Na alínea h, quando é necessário justificar a razão de todos os múltiplos de 12 já estarem riscados, a Isabel escreve que também são múltiplos de 2, mas na primeira versão não dá exemplos que provem o que diz. Contudo, na segunda versão (figura 19) a aluna manteve o que escreveu e complementou a resposta da alínea h dando exemplos de múltiplos de 12 e múltiplos de

2, rodeando os que são comuns, mas não relacionou os exemplos com a frase que tinha escrito anteriormente. Para além disso escreveu a resposta das alíneas i e j que não tinha sido feito na primeira versão do relatório, onde explica por que razão o 90 e o 135 não são primos e escreve respetivamente em cada um dos casos exemplos de divisores para validar a sua afirmação "não é primo porque tem mais de 2 divisores".

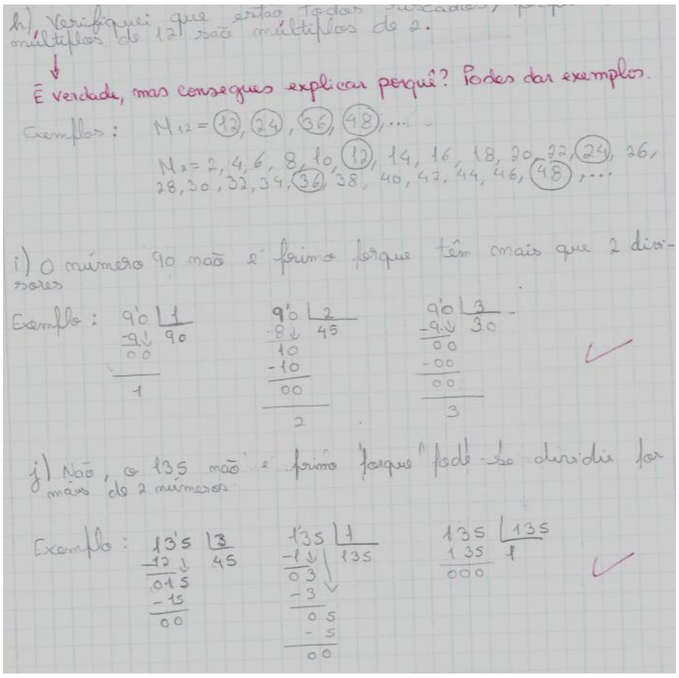


Figura 19 - 2ª versão do relatório escrito da tarefa "Crivo de Eratóstenes"

A Isabel utilizou a representação verbal e simbólica. Na alínea e e f apenas utilizou a representação verbal e na alínea g já utilizou também a representação simbólica quando escreveu os múltiplos de 2 e 4, tendo rodeado todos os múltiplos de 4 e os múltiplos de 2 que são comuns. Na alínea h utilizou apenas a representação verbal na primeira versão, mas na segunda versão já utilizou também a representação simbólica. Nas alíneas i e j, que só fez na segunda versão do relatório, utiliza a representação verbal e a representação simbólica.

Evolução da primeira para a segunda versão

No feedback escrito a este relatório (figura 18) salientei a necessidade de fundamentar as respostas e sugeri que utilizasse exemplos do que está a escrever para defender a sua ideia. A Isabel leu o comentário e completou o relatório inicial, dando exemplos de múltiplos de 2 e de 12 para complementar a resposta dada à alínea h em que refere que "os múltiplos de 12 são múltiplos de 2" (figura 18). Para além disso, na alínea i também viu que era necessário dar exemplos para fundamentar a sua resposta e apresentou três divisões exatas do número 90 para complementar a sua afirmação quando diz que "o número 90 não é primo porque tem mais que 2 divisores" (figura 19). Nesta alínea utilizou apenas três exemplos, porque assim já está a utilizar mais do que 2 divisores. Por último, na alínea j também apresentou três divisões exatas para fundamentar o que escreveu, ou seja, que "o 135 não é primo porque pode-se dividir por mais de 2 números".

A aluna não escreveu no relatório as dificuldades sentidas e quando foi necessário dar exemplos de divisores utilizou o algoritmo da divisão para provar que o 90 e o 135 não são primos, apesar de não gostar de o fazer:

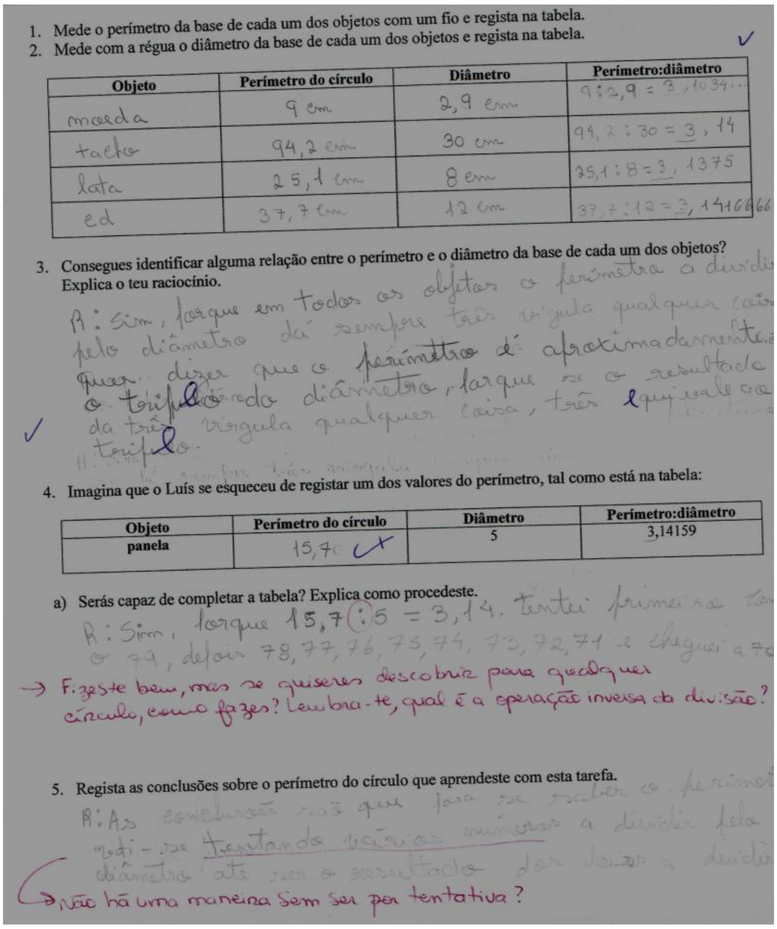
> I- (…) Não gosto de fazer contas de dividir.
> P- Tá bem. Não gostas de fazer porque não sabes ou porque não gostas mesmo?
> I- Porque não gosto mesmo.
>
> (1ª entrevista a Isabel em 17/10/2011)

Tarefa 5

Esta tarefa (cujo enunciado consta no anexo 9) foi realizada em grupo e os alunos começaram por medir com um fio o perímetro do círculo. Cada um dos grupos fez a medição do perímetro e diâmetro de um dos objetos que foi partilhado com os restantes grupos, o que permitiu rapidamente preencher a tabela. Só posteriormente é que foram analisar os dados que tinham recolhido e responderam às questões colocadas no enunciado. Este relatório escrito foi feito na folha de enunciado da tarefa, cuja estrutura foi seguida pelos alunos e onde constava a tabela que foi preenchida com os valores do diâmetro e do perímetro dos círculos.

Interpretação feita ao enunciado

A Isabel leu e interpretou o enunciado da tarefa percebendo que era necessário analisar os dados da tabela para perceber a relação entre o perímetro do círculo e o seu diâmetro.



1. Mede o perímetro da base de cada um dos objetos com um fio e regista na tabela.
2. Mede com a régua o diâmetro da base de cada um dos objetos e regista na tabela.

Objeto	Perímetro do círculo	Diâmetro	Perímetro:diâmetro
moeda	9 cm	2,9 cm	9:2,9 = 3,1034…
tacho	94,2 cm	30 cm	94,2 : 30 = 3,14
lata	25,1 cm	8 cm	25,1 : 8 = 3,1375
cd	37,7 cm	12 cm	37,7 : 12 = 3,1416666

3. Consegues identificar alguma relação entre o perímetro e o diâmetro da base de cada um dos objetos? Explica o teu raciocínio.

R: Sim, porque em todos os objetos o perímetro a dividir pelo diâmetro dá sempre três vírgula qualquer coisa quer dizer que o perímetro é aproximadamente o triplo do diâmetro, porque se o resultado da três vírgula qualquer coisa, três equivale ao triplo.

4. Imagina que o Luís se esqueceu de registar um dos valores do perímetro, tal como está na tabela:

Objeto	Perímetro do círculo	Diâmetro	Perímetro:diâmetro
panela	15,70	5	3,14159

a) Serás capaz de completar a tabela? Explica como procedeste.

R: Sim, porque 15,7 : 5 = 3,14. Tentei primeiro [illegible] o 79, depois 78, 77, 76, 75, 74, 73, 72, 71 e cheguei a 70

→ Fizeste bem, mas se quiseres descobrir para qualquer círculo, como fazes? Lembra-te, qual é a operação inversa da divisão?

5. Regista as conclusões sobre o perímetro do círculo que aprendeste com esta tarefa.

R: As conclusões são que para se saber o perímetro medi-se tentando vários números a dividir pelo diâmetro até que o resultado dar três a dividir

→ Não há uma maneira sem ser por tentativa?

Figura 20 - 1ª versão do relatório escrito da tarefa “Objetos circulares”

Estratégias utilizadas

Com o auxílio da calculadora o grupo fez o quociente entre o perímetro de cada objeto circular e o seu diâmetro. De seguida foram analisar os dados obtidos e chegaram a uma relação entre estas duas grandezas, ou seja, que o perímetro é aproximadamente o triplo do diâmetro. A Isabel percebeu que se o resultado do quociente “dá três vírgula qualquer coisa” então é porque a relação entre o perímetro e o diâmetro envolve o triplo e faz referência que se trata de um valor aproximado. A Isabel risca por baixo do 3, explicando desta forma como é que estabeleceu a relação de triplo, o que é visível na figura * e também foi dito na entrevista.

> P- Então, agora aqui, neste caso, tinhas que explicar a relação entre o perímetro do círculo e o diâmetro. E o que é que tu disseste aqui? Que “perímetro é aproximadamente o triplo do diâmetro”. E para dizeres isto foste olhar para onde?
> I- Para o diâmetro.
> P- Para o valor do diâmetro e para o valor…
> I- Do perímetro.

P- Do perímetro, não é? Daqui, o perímetro é aproximadamente … mas tem alguma coisa… tu assinalaste, repara que tu tens ali 3 e fizeste um risquinho…
I- Sim.
P- Ali por baixo do três. Porquê?
I- Porque em todos os objetos o perímetro a dividir pelo diâmetro dava 3 vírgula qualquer coisa.
P- Então por isso é que falaste no aproximadamente não é?
I- Sim.
(Entrevista a Isabel após a tarefa “Objetos circulares” em 07/03/2012)

A Isabel utilizou a representação verbal e simbólica. Utiliza a representação verbal para explicar como é que chegou ao 15,7 e risca o 3 na tabela, começando a explicar que teria de ser aproximadamente o triplo de 5 para ser o triplo do diâmetro. Depois faz tentativas até chegar a um valor que dividido por 5 dê 3,14 (porque faz o arredondamento às centésimas e assume que o 3,14 é o valor aproximado de π). Por último, escreve que fez “5 X 3,14”, começando assim a utilizar a representação simbólica.

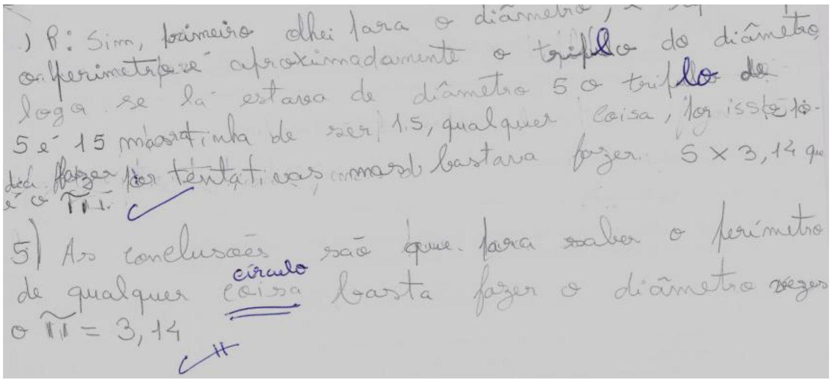

) R: Sim, primeiro olhei para o diâmetro, …
o perímetro era aproximadamente o triplo do diâmetro
logo se lá estava de diâmetro 5 o triplo de
5 é 15 mas tinha de ser 15, qualquer coisa, por isso …
… fazer por tentativas mas bastava fazer 5 × 3,14 que é o π.
5) As conclusões são que para saber o perímetro
de qualquer ~~coisa~~ círculo basta fazer o diâmetro vezes
o π = 3,14

Figura 21- 2ª versão do relatório escrito da tarefa “Objetos circulares”

Na conclusão final apresenta uma conjetura sobre o perímetro do círculo, mas não verifica com exemplos.

Evolução da primeira para a segunda versão

No feedback que dei a este relatório escrito (figura 20) as questões tinham por objetivo fazer com que a aluna completasse o relatório e clarificasse como foi o seu raciocínio e quais as estratégias que utilizou.

Na segunda versão já menciona que se trata do π, o que revela que teve alguma preocupação em procurar a informação no manual, de modo a aperfeiçoar o seu relatório.

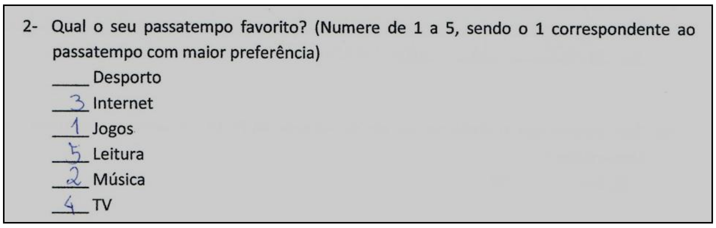
Na versão final (figura 21) a Isabel apenas completou o que tinha feito na 1ª versão. Nesta segunda versão a Isabel já consegue explicar, utilizando principalmente a representação verbal, como é que chegou ao valor 15,7 na questão 4. Assume por escrito que o valor é 3,14 por se tratar do valor aproximado de π, o que na 1ª versão nem tinha sido mencionado. No entanto, não explica que fez o arredondamento às centésimas e como o valor 3,14 está relacionado com o resultado 15,7. Apenas diz que fez 5x3,14 mas não diz que o resultado é 15,7. Nesta segunda versão já fala no π, por ter pesquisado no livro. Apesar da 2ª versão ser individual partilhou esta informação com os colegas.

> P- E depois? Depois aqui nesta se quiseres fazer para qualquer círculo, depois vocês descobriram qual era o valor. Qual é? Qual era o valor?
> I- Era o pi, 3,14.
> P- 3,14 que é um valor aproximado, não é?
> I- Sim.
> P- Mas aqui não escreveste. Portanto, tu aqui não escreveste isso.
> I- Não.
> (Entrevista a Isabel após a tarefa “Objetos circulares” em 07/03/2012)

Filipe

Apresentação

Este estudo foi realizado no ano letivo de 2011/2012 e o aluno Filipe tinha 10 anos e frequentava o 5.º ano de escolaridade, sem ter tido nenhuma retenção no seu percurso escolar. O Filipe é um aluno simpático, conversador, extrovertido e os seus passatempos favoritos são os jogos e a música, revelando também uma grande predisposição para o futebol, ao contrário do que foi inicialmente respondido no questionário realizado no início da recolha de dados:

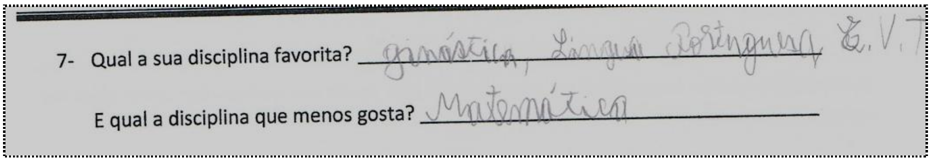


2- Qual o seu passatempo favorito? (Numere de 1 a 5, sendo o 1 correspondente ao passatempo com maior preferência)
____ Desporto
_3_ Internet
_1_ Jogos
_5_ Leitura
_2_ Música
_4_ TV

Figura 22- Resposta à questão 2 do questionário (Filipe)

A leitura é um dos passatempos que realiza com menor preferência. Quando respondeu ao questionário referiu-se às suas preferências tendo por base o que tinha vivido no 1.º ciclo, razão pela qual há uma contradição na disciplina de maior preferência, pois quando foi entrevistado refere que é o Inglês, ao contrário do que tinha escrito no questionário (questão7).

> P- E porquê. De todas qual é a que mais gostas?
> F- Inglês
> P- E porquê?
> F- Porque acho que é melhor também é necessário para a vida e por exemplo, se formos trabalhar para algum sítio devemos saber inglês.
>
> (1ª entrevista a Filipe em 19/10/2011)



7- Qual a sua disciplina favorita? ginástica, Língua Portuguesa, E.V.T

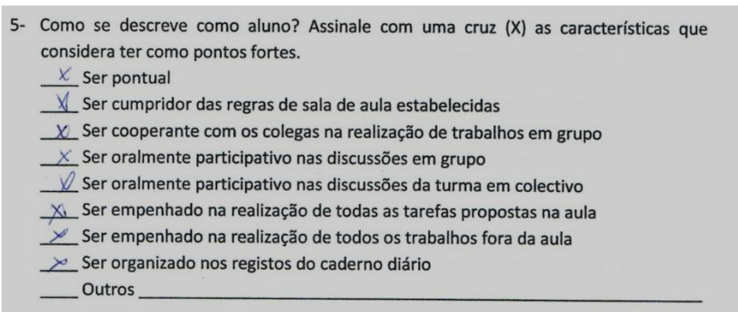
E qual a disciplina que menos gosta? Matemática

Figura 23- Resposta à questão 7 do questionário (Filipe)

O Filipe é um aluno que gosta de Matemática, mas é possível verificar uma contradição com o que disse no questionário (questão7), ou seja, que não gosta de matemática e com o que respondeu na 1ª entrevista quando refere que gosta da matemática:

> P- E de matemática, gostas?
> F- Sim
> P- Porquê?
> F- Como já disse, é necessário e acho que é giro matemática.
>
> (1ª entrevista a Filipe em 19/10/2011)

Quando questionado sobre os seus pontos fortes como aluno (questão 5 do questionário), o Filipe considera ser pontual, cumpridor das regras de sala de aula, empenhado na realização de todas as tarefas, dentro e fora da aula. Para além disso, considera ser cooperante com os colegas, ser participativo nas discussões de grupo ou discussões coletivas da turma e ser organizado nos registos do caderno diário.



5- Como se descreve como aluno? Assinale com uma cruz (X) as características que considera ter como pontos fortes.

X Ser pontual
X Ser cumpridor das regras de sala de aula estabelecidas
X Ser cooperante com os colegas na realização de trabalhos em grupo
X Ser oralmente participativo nas discussões em grupo
X Ser oralmente participativo nas discussões da turma em colectivo
X Ser empenhado na realização de todas as tarefas propostas na aula
X Ser empenhado na realização de todos os trabalhos fora da aula
X Ser organizado nos registos do caderno diário
____ Outros ____

Figura 24- Resposta à questão 5 do questionário (Filipe)

Apesar de ter a noção que tudo deve ser valorizado, nem todas as caraterísticas assinaladas como pontos fortes foram observadas durante este ano letivo, pois não revelou ser regularmente cumpridor das regras de sala de aula estabelecidas e o empenho nas tarefas da aula e trabalhos feitos fora da aula foi irregular. Todas estas caraterísticas foram observadas durante as aulas de Matemática e foram também referidas pelo diretor de turma, tendo por base as informações recebidas pela professora do 1.º ciclo.

Para analisar a sua conceção sobre a matemática e a sua visão sobre a disciplina de Matemática, foi realizado um inquérito e a primeira entrevista cujos dados foram triangulados com os dados recolhidos por observação, à semelhança do que foi feito com os outros dois alunos participantes no estudo. Para o Filipe a sua visão da matemática assenta essencialmente em cálculos e figuras geométricas e quando estes dois conteúdos não são necessários o aluno considera que não se trata de uma situação que envolva a matemática, o que é possível constatar com a resposta que deu depois de ter lido três questões distintas no enunciado que lhe foi facultado durante a entrevista:

> P- Já está? Então diz-me, para cada uma destas situações, qual destas é que tu achas que tem a ver com a matemática? Que é sobre a matemática?
> F- A primeira e a segunda.
> P- E porquê?
> F- Porque…na terceira…aaa…, como é que eu hei-de explicar… Normalmente na matemática, nos problemas é mais hexágonos e para fazer contas e aqui na terceira…. Na primeira e na segunda tem que se fazer contas e desenhos…pronto. E a terceira não…. Não tem nada disso.
> (1ª entrevista a Filipe em 19/10/2011)

Quando foi questionado na primeira entrevista sobre a utilidade da matemática o Filipe remete para a necessidade de fazer cálculos no dia-a-dia. Entende que é necessário saber matemática para qualquer trabalho, tal como já havia referido para o inglês:

> P- Então e o que é que tu pensas sobre a matemática? Achas que é útil ou não?
> F- É, muito.
> P- É útil para quê?
> F- Porque se nós formos para um trabalho qualquer precisamos de saber matemática.
> P- Para quê, por exemplo?
> F- Por exemplo para as contas da casa, por exemplo.
> (1ª entrevista a Filipe em 19/10/2011)

Em relação às tarefas tem preferência pela resolução de problemas, apesar de ter dito inicialmente que apresenta dificuldades. Para além dos problemas, valoriza igualmente os exercícios, atribuindo-lhes igual importância e no questionário (questão8) indica que o que mais gosta de fazer é "resolver questões".

> P- E então qual o tipo de tarefas? Já disseste que é o trabalho de grupo, mas dentro dos trabalhos de grupo o que é que gostas mais de fazer?
> F- Fazer problemas.
> P- Achas que deve ter mais valor um problema ou um exercício?
> F- Exercício.
> P- Os problemas devem ter menos valor, porquê?
> F- Não digo que devem ter menos valor, devem ter o mesmo valor que os exercícios.
>
> (1ª entrevista a Filipe em 19/10/2011)

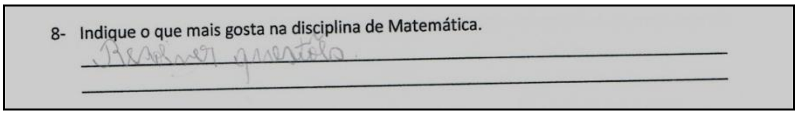

8- Indique o que mais gosta na disciplina de Matemática.
Resolver questões

Figura 25- Resposta à questão 8 do questionário (Filipe)

O que menos gosta na aula de Matemática são as "contas", apesar de reconhecer a utilidade dos cálculos no dia-a-dia.

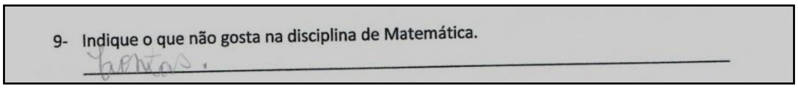

9- Indique o que não gosta na disciplina de Matemática.
Contas.

Figura 26- Resposta à questão 9 do questionário (Filipe)

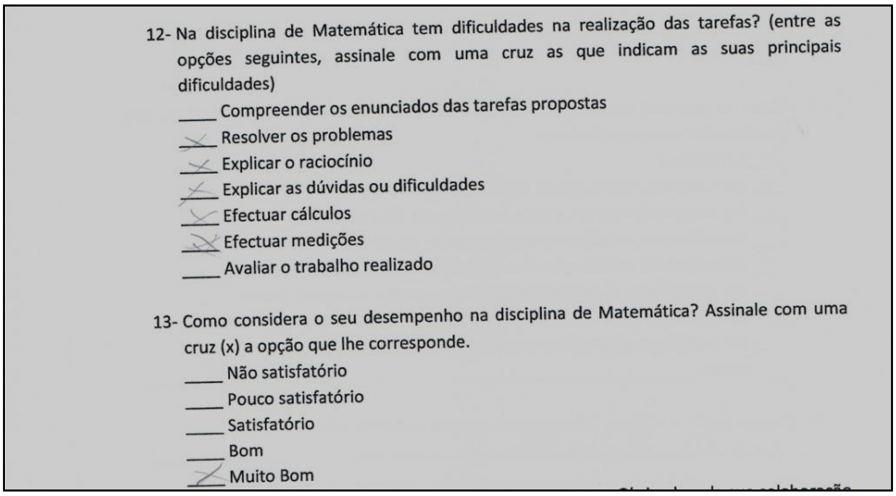
Em relação à metodologia de trabalho o Filipe revelou que prefere os trabalhos de grupo, mas considera que o professor também deve ensinar:

> P- E tu achas que tudo o que é aprendido na aula de matemática, tudo tem de ser ensinado pelos professores ou achas que é melhor serem os alunos a descobrir por eles próprios?
> F- Acho que devia ser os professores e um bocado os alunos.
>
> (1ª entrevista a Filipe em 19/10/2011)

O aluno prefere esta metodologia de trabalho porque assim tem oportunidade de ir vendo e perguntando aos colegas sempre que tem dúvidas e comparar o trabalho que fizeram e também para perceber melhor o enunciado da tarefa. Por observação foi possível constatar que em todas as tarefas recorreu aos colegas e ao professor para ver o que tinha de fazer e iniciar a tarefa. Quando foi questionado sobre a realização do trabalho em grupo, o Filipe referiu que gosta desta metodologia de trabalho porque assim é possível aprender com os colegas:

> P- Porque é que gostas de trabalhos em grupo?
> F- Porque é que gosto?
> P- Sim.
> F- Porque gosto de estar… portanto…porque gosto de aprender com opiniões dos outros.
> P- Dos teus colegas, neste caso.
> F- Sim.
>
> (1ª entrevista a Filipe em 19/10/2011)

Quando respondeu ao questionário (questão 13) sobre o seu desempenho na disciplina de Matemática o Filipe referiu que é muito bom. No entanto, referiu também que tem algumas dificuldades na resolução de problemas, na explicação do raciocínio e dúvidas, nos cálculos e nas medições (questão 12).



12- Na disciplina de Matemática tem dificuldades na realização das tarefas? (entre as opções seguintes, assinale com uma cruz as que indicam as suas principais dificuldades)

____ Compreender os enunciados das tarefas propostas
X Resolver os problemas
X Explicar o raciocínio
X Explicar as dúvidas ou dificuldades
X Efectuar cálculos
X Efectuar medições
____ Avaliar o trabalho realizado

13- Como considera o seu desempenho na disciplina de Matemática? Assinale com uma cruz (x) a opção que lhe corresponde.

____ Não satisfatório
____ Pouco satisfatório
____ Satisfatório
____ Bom
X Muito Bom

Figura 27- Resposta à questão 12 e 13 do questionário (Filipe)

Apesar de não ter referido na entrevista e no questionário (questão 12) que não tem dúvidas na interpretação dos enunciados, é visível na aula que pede ajuda para a sua compreensão:

> P- Quando na… quando tens enunciados escritos consegues percebê-los bem? Ou tens dificuldade na compreensão dos enunciados, das perguntas?
> F- Não tenho lá muita dificuldade.
>
> (1ª entrevista a Filipe em 19/10/2011)

É um aluno que não consegue apresentar as suas ideias oralmente sem ter ajuda de alguém, pois inicia a frase, mas demora muito tempo a completar a ideia e, por vezes, espera que lhe completem a frase. Quando foi entrevistado, o Filipe referiu que tem mais dificuldade na explicação oral do raciocínio, pois entende que é mais fácil explicar o raciocínio com o recurso a registos escritos ou então complementar o que está a dizer com o que tem escrito:

> P- E a explicar o raciocínio tens dificuldade?
> F- Não.
> P- Tens mais dificuldade oralmente ou por escrito?
> F- Oralmente.
> P- Porquê?
> F- Porque sem… para conseguir por exemplo oralmente …. Por exemplo, este aqui, tenho de olhar para aqui porque oralmente não consigo explicar. Só por escrita.
>
> (1ª entrevista a Filipe em 19/10/2011)

Enquanto aluno, outra das dificuldades que diz sentir é na realização dos trabalhos de casa e para superar essa dificuldade recorre à ajuda dos pais ou deixa a tarefa por fazer para perguntar na aula seguinte, tal como vem mencionado no questionário (questão 6) e é referido na 1ªentrevista:

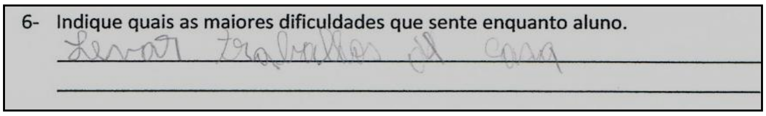

6- Indique quais as maiores dificuldades que sente enquanto aluno.
Levar trabalhos de casa

Figura 28- Resposta à questão 6 do questionário (Filipe)

> P- Quando não consegues resolver, por exemplo, tu hoje no trabalho de casa disseste que não tinhas conseguido resolver…
> F- Perguntei à minha família se podia ajudar.
> P- Sim, então e quando não tens quem te ajude o que é que costumas fazer?
> F- Deixo para depois vir para a escola e perguntar como é que se faz.
>
> (1ª entrevista a Filipe em 19/10/2011)

Pela observação que foi feita é possível verificar que se trata de um aluno que tem necessidade de recorrer constantemente aos colegas para verificar se o seu trabalho está bem feito e é desta forma que se apercebe dos erros, ou seja, quando faz a comparação do que escreveu com os registos escritos dos outros. Na realização das tarefas demostra alguma passividade e insegurança, pois espera regularmente que os colegas tomem as iniciativas e só posteriormente é que lhes pergunta como é que fizeram o trabalho, como nos explica:

> P- Então e o que é que costumas fazer quando tens dificuldade nas tarefas ou quando fazes algum erro o que é que costumas fazer?

F- Ocorre um erro como? Aqui?
P- Nas tarefas, aqui na sala.
F- Aaa…faço as dúvidas….
P- Chamas o professor?
F- Normalmente quando é para discutir também peço como é que eles fizeram…
P- Eles quem?
F- Os alunos.
P- Os teus colegas do grupo, ou a turma inteira?
F- A turma.
P- E quando fazes trabalho de grupo, não perguntas aos teus colegas do grupo?
F- Sim, pergunto, tento perguntar como é que eles fizeram.
P- E quando eles te perguntam a ti? Também respondes?
F- … com…com…
P- Com aquilo que sabes não é?
F- Sim.

(1ª entrevista a Filipe em 19/10/2011)

Para o Filipe na avaliação tudo é importante e como tal, tudo deve ser valorizado, desde que entra até que sai da sala:

P- Sim, avaliação faz-te lembrar o quê?
F- O que nós… como é que eu hei-de dizer… o que nós aprendemos ao longo do ano, com a avaliação de alguma coisa do qual nós estivemos a aprender ao longo deste tempo todo.
P- E para que é que, na tua opinião, para que é que serve a avaliação? Para que é que serve?
F- Para nós termos o conhecimento do que nós fizemos ao longo do ano.
P- Então e na matemática, o que é que tu achas que deve ser valorizado? Já falaste nos trabalhos de grupo e falaste também nos exercícios, nos problemas, mas o que é que tu achas que deve ser valorizado?
F- O comportamento também…
P- Também? E mais…
F- Desde a entrada na sala até lá fora. Tudo.

(1ª entrevista a Filipe em 19/10/2011)

Especificamente sobre os relatórios escritos, o aluno menciona que lê o feedback dado pelo professor e apenas altera o que acha necessário alterar:

P- E quando recebes um trabalho corrigido pelo professor, mas que não está classificado, não é, mas tem lá um comentário escrito, o que é que tu fazes? Lês o comentário, não lês?
F- Leio o comentário e depois tento nalguma folha fazer …
P- e fazes o trabalho todo de novo ou só corriges alguma parte que achas que deves melhorar?

F- Só corrijo a parte que …
P- Não fazes o trabalho todo de novo?
F- Não.
P- E lês com atenção os comentários ou não?
F- Sim.

(1ª entrevista a Filipe em 19/10/2011)

Relatórios escritos

Tarefa 1

Durante a realização da tarefa 1 (anexo 5) o Filipe trabalhou individualmente e não falou com as colegas do grupo, limitando-se apenas a olhar para os rascunhos das colegas e a ver o que tinham feito. Apesar de a professora ter solicitado que partilhassem informação e que no relatório constassem as estratégias utilizadas, o primeiro relatório estava bastante incompleto, pois como não conseguiram gerir bem o tempo não conseguiram fazer também a parte em que tinham de utilizar duas cores. Quando foi questionado sobre o funcionamento do grupo, o Filipe respondeu que o grupo tinha funcionado bem, mas não apresentou justificações para não terem conseguido terminar o relatório:

P- E achas que o trabalho em grupo ajudou a fazer o relatório ou não?
F- Sim
P- E na tarefa funcionou bem o grupo?
F- Sim

(Entrevista a Filipe após a tarefa “Quadrados” em 28/10/2011)

Interpretação feita ao enunciado

O Filipe leu o enunciado e interpretou-o percebendo que na primeira parte era necessário descobrir as maneiras diferentes de colorir a figura utilizando uma só cor e de descrever o critério que utilizou. Na segunda parte do relatório, apesar de ter escrito que é necessário utilizar duas cores, não utilizou as cores, utilizando apenas o lápis de carvão, ao contrário das colegas do grupo.

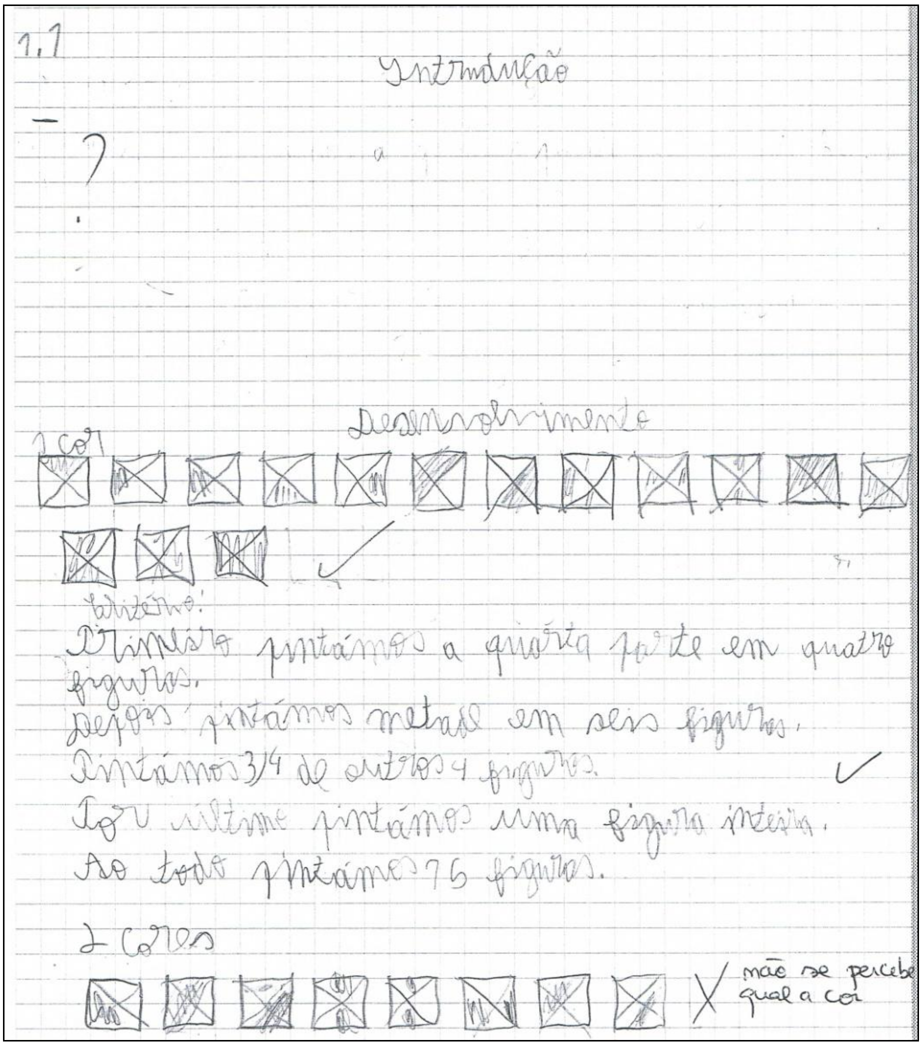


Figura 29 - 1ª versão do relatório escrito da tarefa “Quadrados”

Quando foi questionado sobre a realização da tarefa e elaboração do relatório escrito, o Filipe faz referência à utilização do guião, mas mesmo assim o seu relatório escrito foi entregue muito incompleto:

> P- E nesse relatório, onde é que vocês foram buscar a informação para o fazer?
> F- Aqui… aqui atrás.
> P- Ah, então a informação para o relatório foram buscar aonde?
> F- Aqui, porque…
> P- Isto é o quê?
> F- É o guia da elaboração do relatório do nosso…
> P- Portanto, têm os tópicos que ajudaram vocês a fazerem o relatório não é?
> F- Sim.
> P- Mesmo assim, cumpriram com estes pontos todos?
> F- Sim.
> P- Com a introdução, desenvolvimento, conclusão… as conclusões?

F- …(abanou a cabeça)
(Entrevista a Filipe após a tarefa "Quadrados"em 28/10/2011)

Estratégias utilizadas

O relatório escrito está incompleto, não apresenta introdução e conclusão, apesar de lhe ter sido fornecido um guião para elaboração do mesmo. Ao analisar as duas versões escritas do Filipe é possível verificar que quando foi utilizada apenas uma cor o aluno observou a figura e viu-a como uma unidade dividida em 4 partes e tomou como estratégia pintar uma parte em posições diferentes, depois duas partes em posições diferentes e assim sucessivamente até a figura estar toda pintada. A estratégia que utilizou para determinar o número de opções possíveis com uma cor é igual à que foi utilizada pelas colegas e, nesta parte, o seu relatório escrito está igual. Neste caso, a estratégia foi partir do princípio que o quadrado é uma unidade e pintou a quarta-parte de maneiras diferentes, depois metade, depois os ¾ e a unidade:

P- Então, o que é que fizeram? Explica-me lá o que é que fizeram na tarefa.
F- Tivemos de fazer vários quadrados com quatro…. Com cores lá dentro e depois pintámos de várias maneiras e depois dizer de quantas formas conseguimos fazer. E depois tivemos de fazer outros igual , mas com duas cores.
(Entrevista a Filipe após a tarefa "Quadrados" em 28/10/2011)

Apesar de ter dado início à parte que era pedido para determinarem o número de opções possíveis com duas cores, não terminou o relatório nem escreveu a estratégia que foi utilizada nesse caso.

Para se expressar, o Filipe utilizou a representação pictórica, pois desenhou as figuras e as várias possibilidades. Ao escrever a sua estratégia o aluno exprimiu-se por representação verbal e simbólica, pois utilizou palavras como "quarta-parte" e "metade", mas também utilizou a notação simbólica para fração quando diz que pintou ¾ da figura. Quando se tratou de utilizar duas cores, o Filipe, em vez de usar duas cores, usou apenas uma e nos critérios diz apenas que usou duas cores, mas não explica nenhum critério ou estratégia que tenha seguido para determinar o número de possibilidades. Não fundamentou e não escreveu a introdução da tarefa que faltava na 1ª versão.

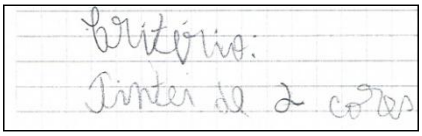


Figura 30 - 2ª versão do relatório escrito da tarefa “Quadrados”

Durante a entrevista, o Filipe disse muito pouco sobre a tarefa em si, mas conseguiu aperceber-se da sua dificuldade em explicar aos outros como pensou:

P- O que é que aprendeste com este relatório?
F- A fazer… aaa… o que eu aprendi com este relatório… a explicar como é que fazíamos, fazer e depois explicar o que eu fiz…
P- Hum…
F- Fizemos…
P- E tiveram dificuldade nisso não foi?
F- Sim, porque fazia e depois explicar, não…
P- Então fazer relatórios ajuda-te…
F- Sim.
P- A explicar melhor como pensaste, é isso?
F- Sim.

(Entrevista a Filipe após a tarefa “Quadrados” em 28/10/2011)

Evolução da primeira para a segunda versão

No feedback que dei a este relatório optei por encaminhar para a conclusão do relatório, utilizando apenas o ponto de interrogação na introdução uma vez que estava em branco. Também verifiquei que na parte em que deveriam ser usadas duas cores o aluno usou apenas o lápis de carvão razão pela qual escrevi “Não se percebe qual é a cor” (Figura 29). Reforcei oralmente o que o grupo tinha feito bem, mas alertei para a necessidade da conclusão do relatório. Na segunda versão, o aluno utilizou a representação verbal apenas para acrescentar na segunda parte do relatório um critério que usou para pintar a figura, ou seja, que utilizou duas cores. Não fundamentou nada nem escreveu a introdução da tarefa que faltava na 1ª versão.

Tarefa 2

Durante a realização desta tarefa (cujo enunciado consta no anexo 6) os alunos trocaram poucas informações oralmente sendo visível que o Filipe constantemente olhava para o que as colegas estavam a escrever e de seguida também escrevia. O grupo voltou a utilizar o guião para a elaboração do relatório escrito e o que foi entregue pelo

Filipe já apresenta uma introdução e o desenvolvimento, onde o aluno desenha a figura inicial e apresenta os polígonos que encontrou. No entanto, não apresenta conclusões nem dificuldades sentidas. Quando foi questionado sobre o funcionamento do grupo, o Filipe respondeu que o grupo tinha funcionado bem, mas não apresentou justificações para não ter completado o relatório.

> P- Hum, e… e o trabalho de grupo foi útil, não foi? Foi importante? Ajudou-te a fazer?
> F- Sim.
>
> (Entrevista a Filipe após a tarefa "Polígonos" em 17/11/2011)

Interpretação do enunciado

O Filipe leu e interpretou o enunciado da tarefa percebendo claramente que era necessário descobrir e classificar polígonos na figura inicial, mas não descreveu a estratégia que utilizou, não apresentou conclusões nem dificuldades sentidas.

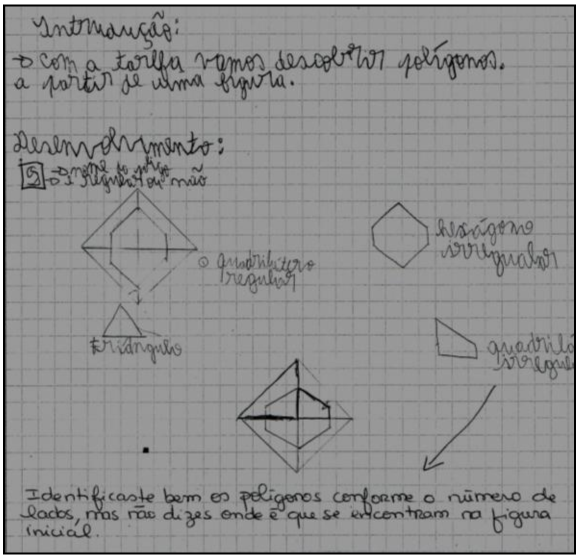


Figura 31 - 1ª versão do relatório escrito sobre a tarefa "Polígonos"

Ao analisar a primeira versão do Filipe é possível verificar que o aluno interpretou que era necessário encontrar vários polígonos na figura, classificá-los e indicar se é regular ou não. Para o aluno o mais importante era contar o número de lados e escrever o nome. A fonte de informação foi o caderno, onde procurou o nome dos polígonos, uma vez que já tinha sido lecionado quando se abordou o tema dos sólidos geométricos.

P- E onde é que foste buscar esta informação para saber o nome? Sabias de cor ou tinhas essa informação, onde é que foste buscar?
F- Alguns sabia de cor e … alguns que neste caso era só contar o número de lados e depois…
P- E os que não te lembravas foste ver aonde?
F- Ao caderno.
(Entrevista a Filipe após a tarefa "Polígonos" em 17/11/2011)

Estratégias utilizadas

Na primeira versão o Filipe escreveu corretamente o nome dos polígonos encontrados, mas não registou uma estratégia para os encontrar. Para além disso, também não os localizou na figura inicial. O aluno foi, tal como as suas colegas, entrevistado sobre a tarefa, onde refere que o que fez foi contar o número de lados de cada polígono encontrado para que lhe pudesse atribuir um nome.

P- Então o que é que tinham que descobrir nesta figura que desenharam? O que é que tinham de descobrir aqui?
F- O nome da figura.
P- Sim, mas o que é que tinham de descobrir dentro da figura? Tinham de descobrir o quê? Vários…
F- aaa….
P- Polígonos não é?
F- Polígonos, sim.
P- Que estivessem aqui dentro. Então o que é que vocês fizeram para encontrar isso?
F- Aaa…
P- Como é que fizeram?
F- Como é que…. Aaa…. Olhámos para a figura…
P-Sim.
F- Depois metemos o nome ao lado, depois tínhamos de contar… agora… contar…
P- Tinham de contar o quê?
F- As linhas…
P- Então, isto é o número de…
F- de…
P- Como é que se chama isto?
F- Polígonos, ai não….
P- Tinham de contar o número de lados não é?
F- Sim, o número de lados.
P- Então, o número de lados, neste caso, em cada figura, foram contar o número de lados.
F- Sim.
(Entrevista a Filipe após a tarefa "Polígonos" em 17/11/2011)

Apesar de ter feito na primeira versão um relatório muito confuso por ter feito os polígonos fora da figura inicial, na segunda versão conseguiu melhorar a organização do relatório, pois desenhou várias vezes a figura inicial e destacou os polígonos encontrados. Para se expressar utilizou a representação pictórica ao desenhar as figuras que encontrou e complementou com a representação verbal ao escrever o nome do polígono.

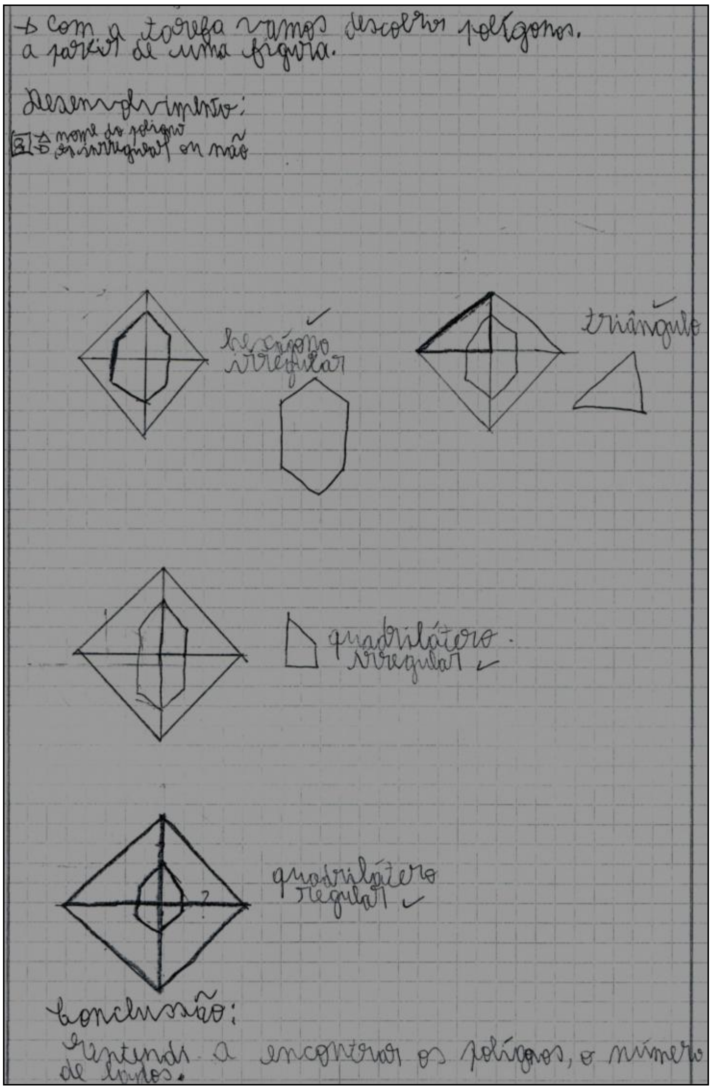


Figura 32 - 2ª versão do relatório escrito sobre a tarefa "Polígonos"

Evolução da primeira para a segunda versão

Apesar de fazer corretamente a correspondência entre o número de lados do polígono encontrado e o seu nome, não localiza na figura onde é que estes se encontram, à exceção do quadrado, que escreve como um quadrilátero regular.

No feedback escrito que dei a este relatório (figura 31) remeto para a reformulação do relatório referindo que é necessário que localize na figura inicial cada um dos polígonos. Na segunda versão (figura 32), o aluno não tentou descobrir polígonos diferentes dos que tinha dito na primeira versão. Limitou-se a desenhar várias vezes a figura inicial e destacar onde é que os polígonos estavam localizados, fazendo a correspondência com o seu nome. Desta forma, continuou a utilizar a representação pictórica quando desenha os polígonos e a representação verbal para escrever o seu nome. No entanto, na segunda versão do relatório escrito que foi entregue pelo Filipe já consta uma conclusão onde refere verbalmente o que aprendeu com a tarefa. No caso do último polígono, ou seja, no quadrilátero regular, para além de destacar o quadrado também destacou um triângulo, mas não escreveu nada, limitando-se a carregar com o lápis.

Tarefa 3

Nesta tarefa (cujo enunciado se encontra no anexo 7) o Filipe já participou um pouco mais do que nas tarefas anteriores e enquanto as colegas construíam as figuras com os palitos, o aluno começou a ver que andava de 4 em 4.

F – É de 4 em 4 não é?
I- É. 4,8,16,sim.
(Gravação da aula da tarefa “Fósforos” em 04/01/2012)

Por este motivo, alertou-as tendo-lhes dito o que tinha descoberto, mas depois quando começaram a construir a tabela, que foi sugerida pela Isabel, o Filipe limitou-se a copiar o que as colegas escreveram na tabela pois não dominava a tabuada do 4.

F- Quem é que sabe a tabuada do 4?
I- 44, 48, 52, 56, 60
F- I… olha lá o penúltimo…
J- oh!… (e altera o que escreveu)
F- 420, não. É o número de quê, de palitos?
I- Olha, o 10 tem 40, …
(Gravação da aula da tarefa “Fósforos” em 04/01/2012)

Apesar de ter a máquina calculadora resolve perguntar às colegas e copia o que estas vão escrevendo. Durante a elaboração da tabela o Filipe teve dúvidas e demonstrou-as oralmente às colegas. Estas ajudaram-no e o aluno também participou com ideias para a tabela:

P- E tu achas que o trabalho de grupo foi útil? Ajudou-te?

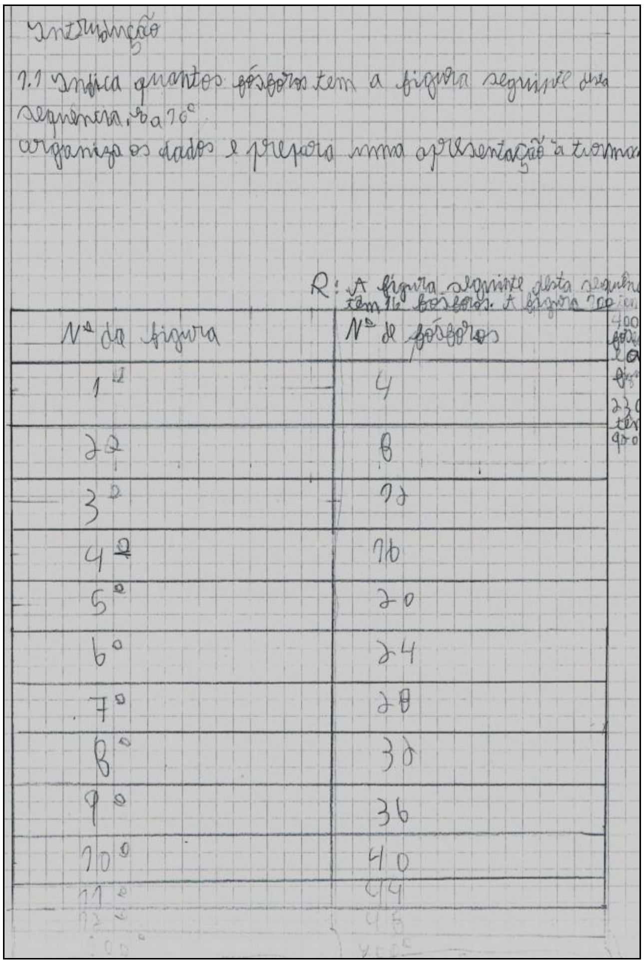
F- Ajudou.
P- Em quê?
F- A perceber aaa… perceber como fazer a tabela e … relatámos as nossas dúvidas dentro do grupo.
(…)
P- E tu tiveste dúvidas, tiveste mais dúvidas ou também deste ideias aos teus colegas?
F- Também dei algumas ideias para fazer.

(Entrevista a Filipe após a tarefa "Fósforos" em 06/01/2012)

Embora tenha já participado no grupo durante a tarefa, o Filipe não participou nas discussões da turma e não apresentou dúvidas ou questões.

Interpretação feita ao enunciado

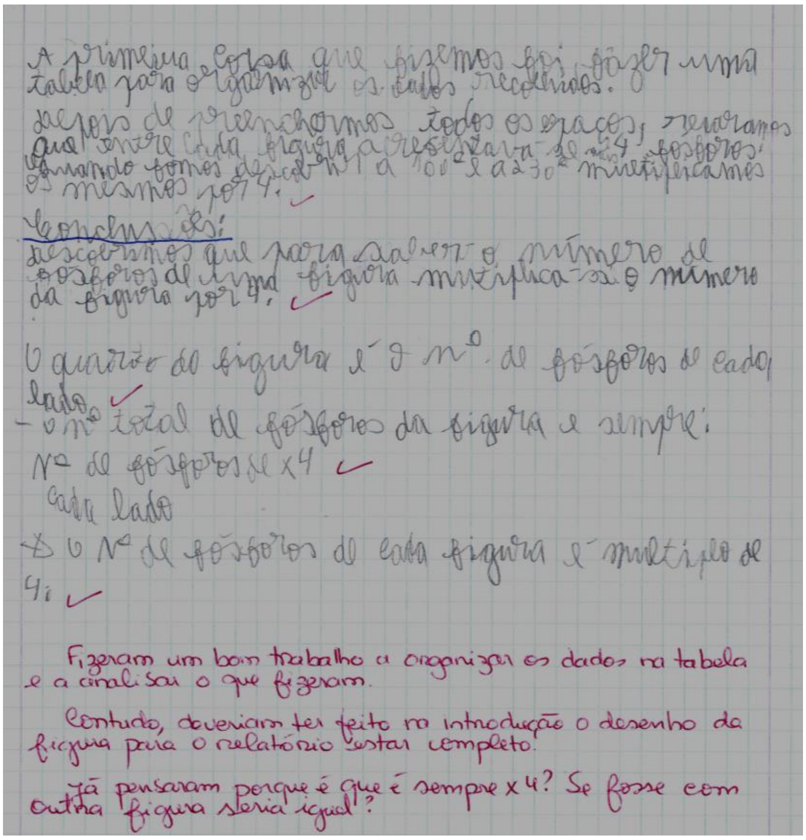
O Filipe leu e interpretou o enunciado percebendo que era necessário determinar vários termos da sequência para posteriormente escrever a sua lei de formação. e que era vantajoso organizar os dados numa tabela para posteriormente serem analisados.


Introdução
1.1 Indica quantos fósforos tem a figura seguinte desta sequência, a 10º
organiza os dados e prepara uma apresentação à turma

R: A figura seguinte desta sequência tem 16 fósforos. A figura 100

Nº da figura	Nº de fósforos
1º	4
2º	8
3º	12
4º	16
5º	20
6º	24
7º	28
8º	32
9º	36
10º	40
11º	44
12º	48

Figura 33 - 1ª versão do relatório escrito sobre a tarefa "Fósforos"


A primeira coisa que fizemos foi fazer uma tabela para organizar os dados recolhidos.
Depois de preenchermos todos os espaços, reparamos que entre cada figura a diferença era de 4 fósforos. Quando fomos descobrir a 100.ª e a 230.ª multiplicamos os mesmos por 4.

Conclusões:
Descobrimos que para saber o número de fósforos de uma figura multiplica-se o número da figura por 4.

O quarto da figura é o n.º de fósforos de cada lado.
- O n.º total de fósforos da figura é sempre:
N.º de fósforos de cada lado x4
- O N.º de fósforos de cada figura é múltiplo de 4.

Fizeram um bom trabalho a organizar os dados na tabela e a analisar o que fizeram.
Contudo, deveriam ter feito na introdução o desenho da figura para o relatório estar completo.
Já pensaram porque é que é sempre x4? Se fosse com outra figura seria igual?

Figura 34- Continuação da 1ª versão do relatório escrito da tarefa “Fósforos”

Estratégias utilizadas

Neste relatório escrito o Filipe mantém a estrutura definida no guião, ou seja, inicia com uma introdução, faz o desenvolvimento e posteriormente escreve algumas conjeturas, mas não refere as dificuldades sentidas. A tabela foi um recurso importante para a organização dos dados, pois permitiu que depois de construírem poucas figuras rapidamente se apercebessem que se tratava de múltiplos de 4.

> P- E a tabela foi importante para organizar, não é?
> F- Sim, foi.
> P- E quem é que teve a ideia da tabela?
> F- Foi… tenho que dizer o nome?
> P- Sim, podes dizer…
> F- Foi a Isabel (nome fictício). E depois eu disse para fazer 1,2, o número da figura…
>
> (Entrevista a Filipe após a tarefa “Fósforos” em 06/01/2012)

Ao analisar o relatório escrito do Filipe é possível verificar que apenas construíram algumas figuras e quando o aluno foi questionado sobre o que fizeram durante a tarefa referiu que construíram apenas as figuras até à figura número 12, porque a partir daí foram verificar se a regularidade que tinham encontrado era válida e avançaram para figuras com números superiores como a 100ª e a 230ª:

> P- (….) E o que é que fizeram na tarefa? Explica-me lá, assim rapidamente.
> F- Tivemos de fazer uma tabela com o número da figura da…. pronto…
> P- O número da figura da sequência, não é?
> F- Que era desde o 1 até ao 230, mas como não tínhamos de fazer 1,23, não sei quê, parámos no 12 e depois fizemos 100, 230.
> (Entrevista a Filipe após a tarefa "Fósforos" em 06/01/2012)

Na primeira versão do relatório escrito o Filipe organizou os dados numa tabela e utilizou a representação verbal para escrever a introdução da tarefa e as conjeturas que lhe permitiram chegar à lei de formação da sequência e a representação simbólica para representar a tabuada do 4 pois diz que é sempre o "nº de fósforos x 4" (figura 34). O aluno explica o processo pelo qual descobriram que se tratavam de múltiplos de 4 ao escrever que "entre cada figura acrescentava-se mais 4 fósforos". Deste modo percebeu que se tratava de números da tabuada do 4:

> P- Então, começaram a ver a partir de certa altura que não era necessário estar a fazer um a um, não é?
> F- Sim.
> P- Porquê? O que é que vocês fizeram aqui neste caso?
> F- Neste caso usámos….
> P- Começaram a ver o quê, que era sempre da tabuada…
> F- do 4.
> (Entrevista a Filipe após a tarefa "Fósforos" em 06/01/2012)

No entanto, não apresenta cálculos nem esquemas das figuras para justificar a conjetura e apresenta apenas na tabela o número de fósforos de várias figuras, mas não faz referência que avança de 4 em 4. No grupo, a figura 10 foi importante para ficarem mais seguros quanto à hipótese levantada, mas no relatório escrito do Filipe essa descoberta não vem mencionada, ao contrário do que fizeram as suas colegas. No entanto, referiu que para as figuras maiores não foi necessário contabilizar o número de palitos, pois na " 100ª e a 230ª multiplicámos os mesmos por 4". Escreveu também a lei de formação da sequência e que "o número de fósforos de cada figura é múltiplo de 4".

Evolução da primeira para a segunda versão

No feedback que dei (figura 34) procurei que o Filipe refletisse sobre a razão de ser sempre "X4" e durante a entrevista também o questionei sobre o assunto, onde referiu que se tratavam de múltiplos de 4 porque a figura inicial era um quadrado, mas não o escreveu no relatório escrito.

> P- Por exemplo, tá bem? Então e vocês já pensaram, neste caso, tu, pensaste porque é que aqui era sempre vezes 4?
> F- Porque era…um… quaaaa…
> P- Porque era um…
> F-quadrado
> P- Um quadrado. E o quadrado tem quantos lados?
> F- 4.
>
> (Entrevista a Filipe após a tarefa "Fósforos" em 06/01/2012)

Como não escreveu na primeira versão a razão de serem múltiplos de 4 e não múltiplos de 5 ou de 6 foi feito um comentário escrito onde lhe é colocada esta questão, mas o aluno não aperfeiçoou o relatório e entregou-o exatamente igual à versão anterior. Para além disso, no feedback também consta a necessidade de melhorar a introdução do relatório, mas o aluno manteve a versão inicial e não fez qualquer melhoria ou aperfeiçoamento do relatório.

Tarefa 4

Esta tarefa (que consta no anexo 8) foi realizada em grupo e a estrutura do relatório escrito teve como orientação as questões do manual. Durante a realização da tarefa, apesar de terem o livro à sua disposição, os alunos preferiram perguntar-me o que são números primos, razão pela qual sugeri a consulta do manual onde leram a definição de número primo. O Filipe continuou bastante observador do trabalho das colegas e escreveu na sua folha, mas não houve partilha de informação oralmente. Quando foi questionado sobre o funcionamento do grupo na realização da tarefa o aluno refere que houve partilha de informação e que o grupo funcionou bem:

> P- Só? E não partilharam informações entre vocês?
> F- Sim.
> P- No grupo, foi importante ter feito em grupo não foi?
> F- Sim.
> P- Então as tuas colegas não te ajudaram?
> F- Ajudaram
> P- E tu também as ajudaste ou não?
> F- Sim.
> P- Em quê?
> F- Disse…aaa… ora… a dar as respostas… como a A e algumas respostas, porque algumas elas não percebiam e eu percebi e tentava dizer a resposta e elas depois tentavam também dizer mais…

(Entrevista a Filipe após a tarefa “Crivo de Eratóstenes” em 16/01/2012)

Interpretação feita ao enunciado

O Filipe leu e interpretou o enunciado percebendo que era necessário rodear os números 2,3,4,5, 7 e riscar os múltiplos de cada um deles até ao fim. Ao contrário das colegas do grupo não organizou os múltiplos por cores.

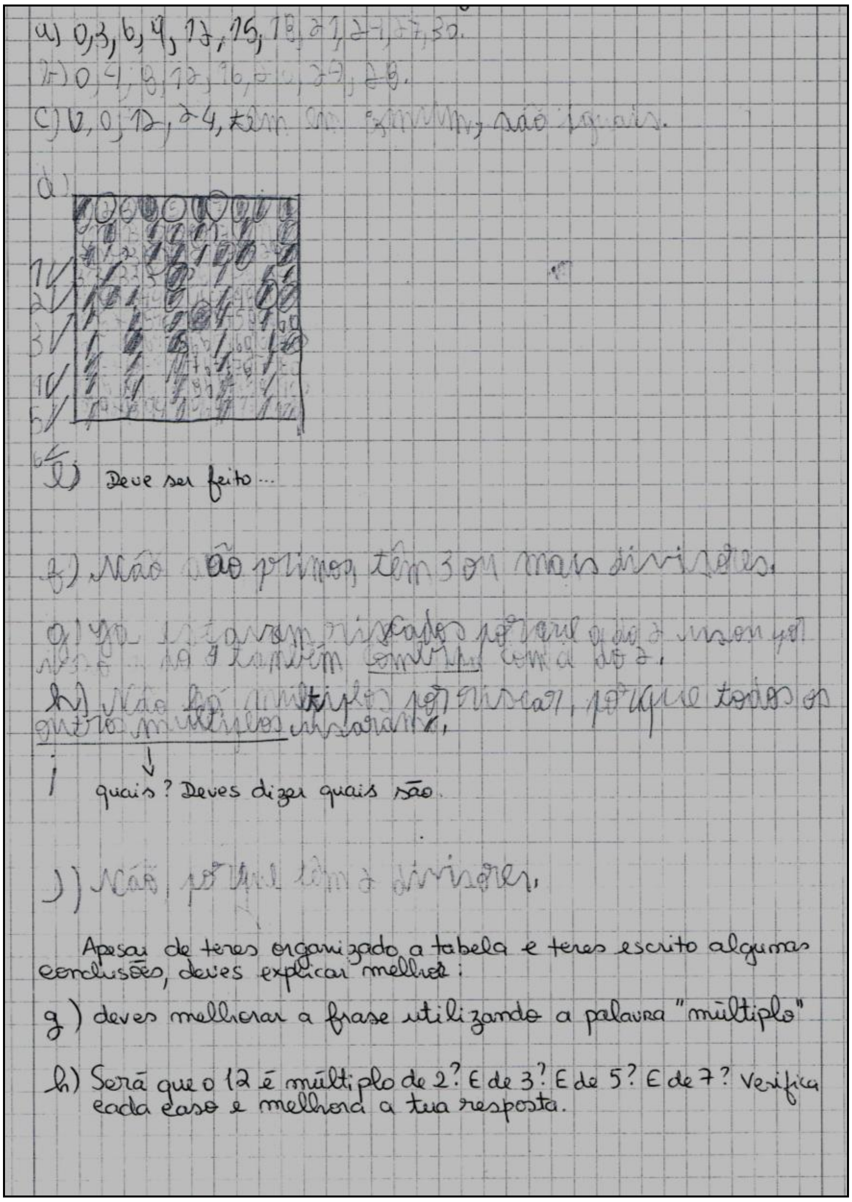


Figura 35- 1ª versão do relatório escrito da tarefa “Crivo de Eratóstenes”

Para pesquisar informação o Filipe utilizou como recurso o livro e o caderno:

P- Então e para fazerem o relatório onde é que foram buscar a informação?
F- Ao livro.

P- Pois, você estavam a fazer do livro e depois foram procurar também no livro. E para além do livro?
F- O caderno… ao caderno.
(Entrevista a Filipe após a tarefa "Crivo de Eratóstenes" em 16/01/2012)

Estratégias utilizadas

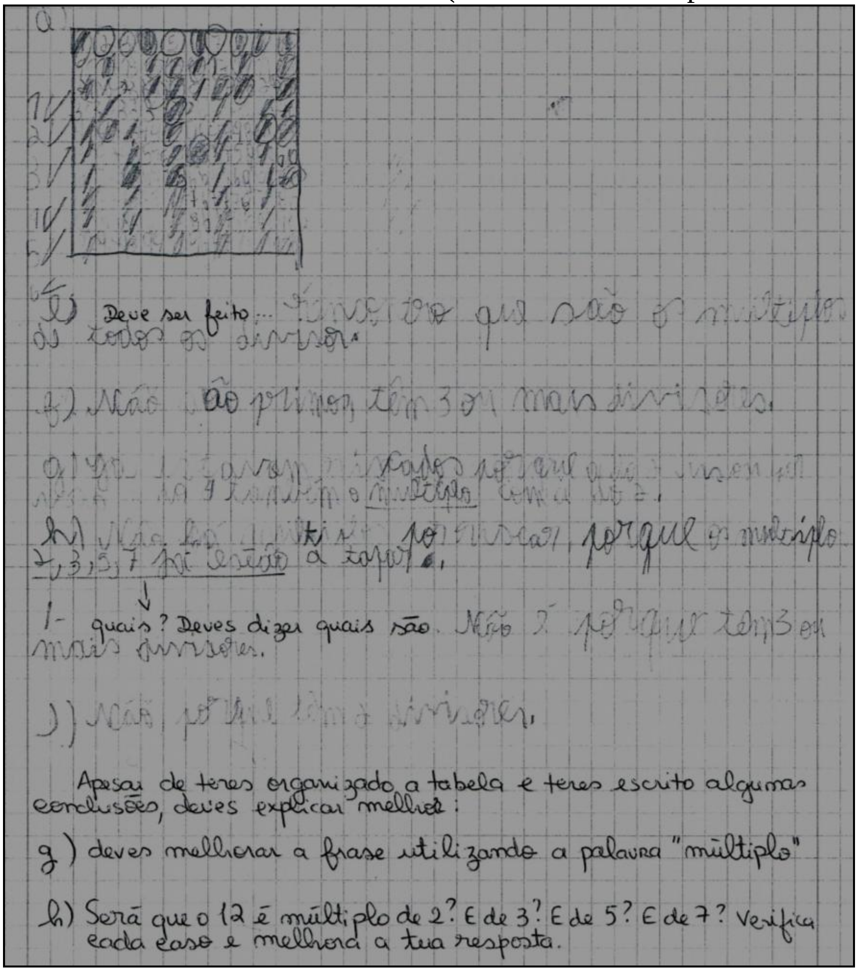
Ao analisar as duas versões dos relatórios escritos do Filipe verifica-se que apenas rodeou os números 2,3,4,5,7 porque era diretamente pedido no enunciado. Ao contrário das suas colegas de grupo, não organizou os múltiplos por cores. Não deu resposta à alínea e na primeira versão não tendo por isso apresentado uma explicação sobre o que têm em comum os números que foram rodeados. Na segunda versão o aluno escreveu que os números que estão rodeados são "múltiplos de todos os divisores" (figura 36). Em todas as alíneas seguintes não apresentou os divisores para explicar se um número é primo ou não. Na alínea f, em que é pedido para justificar por que razão os números riscados não são primos, o Filipe recorre à definição que leu no manual sobre os números primos, pois diz que "Não são primos, têm 3 ou mais divisores" (figura 35), mas mais uma vez não dá exemplos porque não apresentou os divisores dos números que estão riscados. Na alínea g, em que tinham de explicar por que razão não era necessário riscar os múltiplos de 4, o Filipe com uma representação verbal explica que "o do 2 usou, por isso a do 4 também combina com a do 2" (figura 35), mas não dá exemplos de múltiplos de 2 e 4 que sejam comuns. Na alínea h o aluno verificou que não há múltiplos por riscar e explica por palavras que todos os outros múltiplos já usaram, mas não indica quais nem dá exemplos de múltiplos comuns. Para além, disso considera que os múltiplos de 5 e de 7 também são múltiplos de 12, o que não se verifica.

O Filipe utilizou a representação verbal e simbólica, com predomínio da representação verbal, pois apenas utiliza a representação simbólica para indicar os números. Quando escreveu na representação verbal nem sempre utilizou os termos convenientes e apresenta dificuldade na construção das frases. No entanto, essa dificuldade não veio mencionada no relatório e o Filipe diz sentir mais dificuldade em explicar o raciocínio oralmente do que por escrito:

P- E a explicar o raciocínio tens dificuldade?
F- Não.
P- Tens mais dificuldade oralmente ou por escrito?
F- Oralmente.
P- Porquê?

F- Porque sem… para conseguir por exemplo oralmente …. Por exemplo este aqui tenho de olhar para aqui porque oralmente não consigo explicar. Só por escrita.

(1ª entrevista a Filipe em 19/10/2011)


e) Deve ser feito... Encontro que são os múltiplos de todos os divisores.

f) Não são primos têm 3 ou mais divisores.

h) Não há múltiplos por riscar porque os múltiplos 2, 3, 5, 7 já estão a tapar.

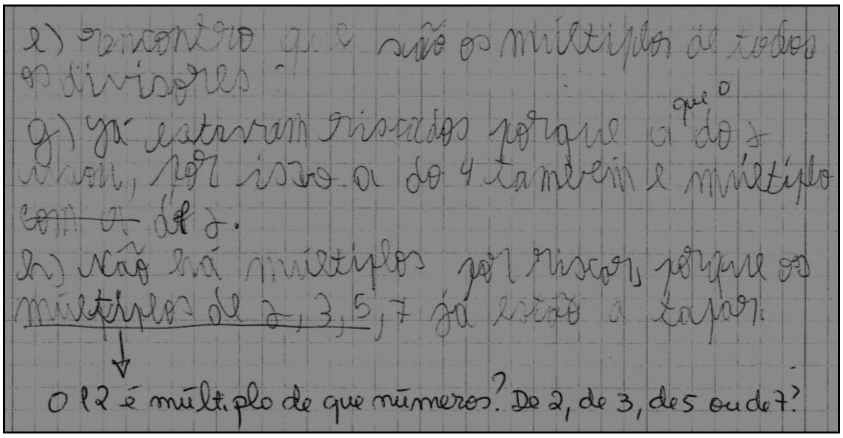
i- quais? Deves dizer quais são. Não é porque têm 3 ou mais divisores.

j) Não porque têm 2 divisores.

Apesar de teres organizado a tabela e teres escrito algumas conclusões, deves explicar melhor:

g) deves melhorar a frase utilizando a palavra "múltiplo"

h) Será que o 12 é múltiplo de 2? E de 3? E de 5? E de 7? Verifica cada caso e melhora a tua resposta.


e) Encontro que são os múltiplos de todos os divisores.

g) Já estavam riscados porque o do 2, por isso o do 4 também é múltiplo ~~com o~~ do 2.

h) Não há múltiplos por riscar porque os múltiplos de 2, 3, 5, 7 já estão a tapar.

O 12 é múltiplo de que números? De 2, de 3, de 5 ou de 7?

Figura 36- 2ª versão do relatório escrito da tarefa “Crivo de Eratóstenes”

Nas duas versões o aluno fez uso da definição de número primo para responder às questões, mas em nenhuma delas deu exemplos que permitissem perceber o processo utilizado. Por exemplo, nas alíneas f e h não dá exemplos de divisores dos números riscados para validar quando diz “têm 3 ou mais divisores”. Na alínea h também não escreveu os múltiplos de 12 nem os múltiplos dos números rodeados, o que o leva a escrever que “os múltiplos de 2,3,5,7 já estão a tapar”, quando na verdade os múltiplos de 5 e de 7 não são todos comuns com os múltiplos de 12. Na alínea g escreve que os múltiplos de 4 também são múltiplos de 2, mas não dá exemplos e não utiliza corretamente o termo múltiplo na construção da frase pois diz que “a do 2 usou, por isso a do 4 também é múltiplo de 2”. Nas alíneas i e j dá a resposta com base na definição de número primo, mas mais uma vez não dá exemplos dos divisores dos números, de modo a validar as suas afirmações.

Durante a entrevista é possível verificar que o aluno fica sempre à espera que se inicie a frase para que pense numa forma de a terminar, sendo por isso necessário dar-lhe algum tempo para pensar.

> P- Havia aqui uns que nunca estavam riscados, não é? Quais são esses, são os números…
> F- ímpares….pares
> P- Eram quase todos ímpares é verdade, mas há um que é par…
> F- O 2
> P- que é o 2. Então e neste caso?
> F- Neste caso é… é vários…
> P- Há aqui uns que não são divisíveis por… há aqui uns que vocês puseram uma bolinha…
> F- sim.
> P- Estes são quais?
> F- são os…
> P- São quais, o 2, o 3, o 5 o 7? Tá aqui uma bolinha.
> F- Sim, são os que…
> P- só se dividem…por…
> F- 1
> P- ou por…
> F- Ou por 2… por ele próprio
> P- E isso é o quê? São os números quê?
> F- Aaa… são os números…aaa… números (…)
> F- Números… primos
> (Entrevista a Filipe após a tarefa “Crivo de Eratóstenes” em 16/01/2012)

Evolução da primeira para a segunda versão

No feedback dado a este relatório (figura 35) há um reforço positivo do que foi bem feito e é pedido que melhore as suas respostas incluindo palavras como “múltiplo”. No caso da alínea h com o feedback pretende-se que o aluno verifique quais são os múltiplos que são comuns com os múltiplos de 12 e que dê exemplos, nomeadamente que verifique se os múltiplos de 2,3,5 e 7 são também múltiplos de 12. Contudo, na segunda versão (figura 36), na alínea e o Filipe diz que os números rodeados, que era suposto identificar como números primos, "são os múltiplos de todos os divisores", mas depois não dá exemplos concretos. Na alínea g, o aluno limitou-se a apagar a palavra "combina" e escreveu "múltiplo".

Na segunda versão o aluno limitou-se a escrever a resposta da alínea e) e acrescentar a resposta da alínea h, mantendo as alíneas f, g e j na própria folha que entregou na primeira versão, apesar de ter consciência que há algumas lacunas no relatório, pois menciona que o relatório está incompleto, por não fazer referência aos números primos:

> P- Há uns que sabem que são os números primos, não é? Mas vocês depois não falaram aqui nos números primos.
> F- Não
> P- Não foram procurar informação em nenhum livro…
> F- Fomos ao livro
> P- para fazer o relatório? Enquanto estavam a fazer…Essa informação estava lá.
> F- Pois, fomos ao livro…
> P- Mas não escreveram aqui.
> F- Não.
> P- Porquê? Acharam que não era importante?
> F- Importante é, mas… nós não escrevemos…
> P- Portanto, neste caso este relatório achas que está completo ou está um bocadinho incompleto?
> F- Está um bocado incompleto…
>
> (Entrevista a Filipe após a tarefa "Crivo de Eratóstenes" em 16/01/2012)

Na alínea h o Filipe apagou "outros múltiplos" e escreveu no mesmo espaço "2,3,5,7", mas não vai verificar o que escreveu. Com o que escreveu está a dizer que o 12 também é múltiplo de 5 e 7, o que não acontece. Mais uma vez não desenvolve a sua resposta, não dá exemplos nem escreve os múltiplos de 2,3,5 e 7 para se poder organizar, uma vez que no Crivo apenas utilizou uma cor, ao contrário do que foi feito pelas suas colegas, o que demonstra mais uma vez que o grupo não funcionou bem.

Na alínea i) que não tinha sido feita na primeira versão e era suposto ter explicado por que razão o 90 não é um número primo, diz que "não é porque tem 3 ou mais divisores". Também nesta resposta não dá exemplos de divisores de 90 para provar que tem mais do que 3 divisores e na própria frase da resposta não inclui a palavra "primo". Na segunda página do relatório, que se encontra evidenciada na figura 36, repete a resposta das alíneas e,g e h, mas não acrescenta mais nada nem dá exemplos, copiando apenas o que acrescentou na primeira página sobre a primeira versão do relatório.

No que diz respeito à comunicação matemática não utiliza outras representações diferentes das que utilizou na primeira versão e não dá exemplos que validem as suas afirmações.

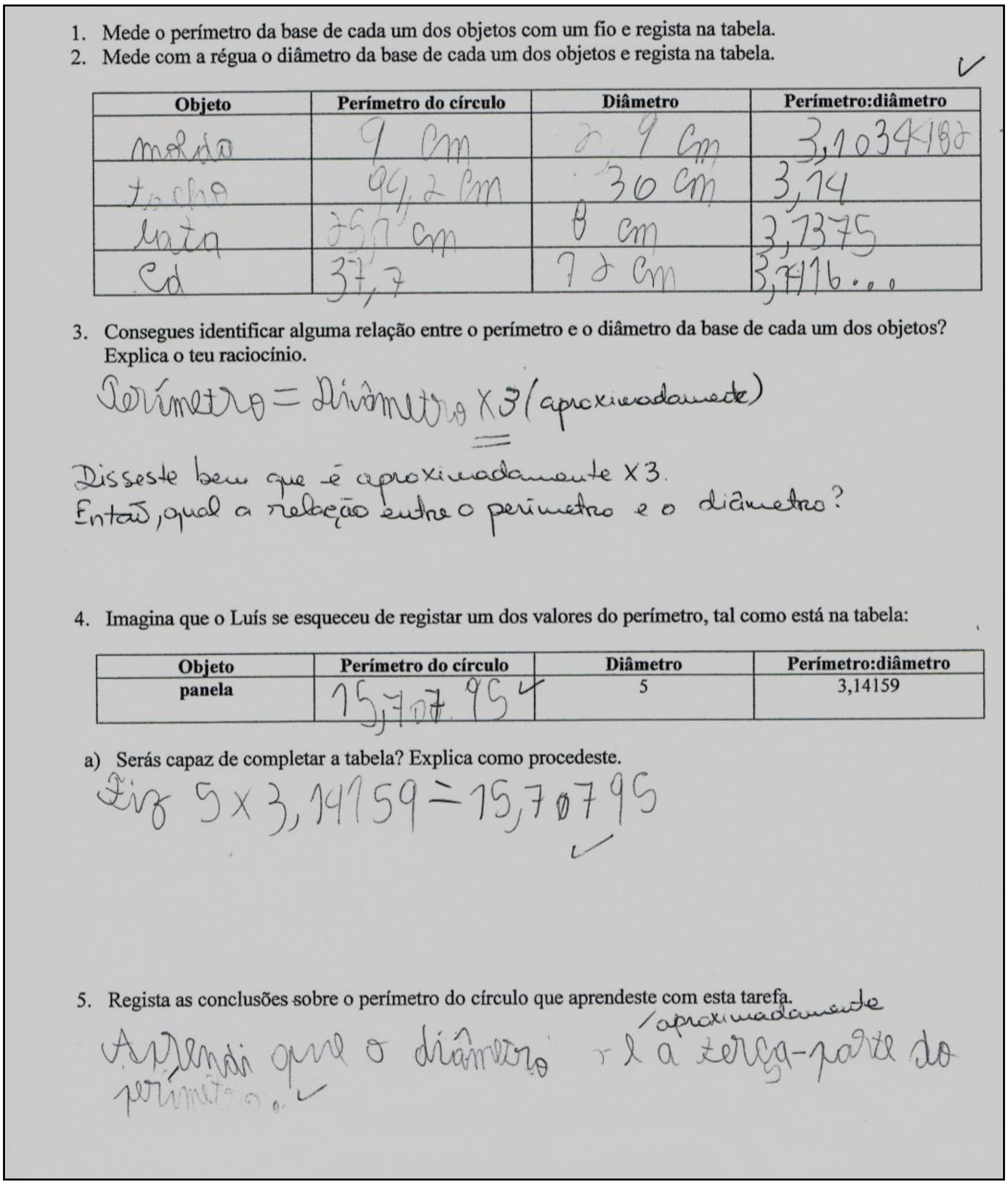
Tarefa 5

Esta tarefa (cujo enunciado se encontra no anexo 9) foi realizada em grupo, tendo os alunos efetuado a medição do perímetro de um objeto circular, à semelhança dos restantes grupos da turma. Após a medição todos os grupos disseram aos colegas os dados para que fosse preenchida uma tabela sobre vários objetos circulares, onde constava o perímetro do círculo, o diâmetro e o quociente do perímetro pelo diâmetro. A utilização da calculadora foi fundamental porque permitiu que rapidamente fizessem os quocientes e o aluno reconheceu a sua importância. No entanto, apesar de ter a calculadora, o Filipe esperou frequentemente que as colegas fizessem os cálculos para depois copiar. O aluno não participou ativamente nas discussões da turma e não apresentou dúvidas ou questões. No grupo limitou-se a aceitar o que foi dito ou escrito pelas colegas e não partilhou informações oralmente.

Interpretação feita ao enunciado

O Filipe leu e interpretou o enunciado percebendo que era necessário efetuar o quociente entre o perímetro do círculo e o diâmetro e estabelecer uma relação entre eles. Ao analisar a primeira versão escrita do aluno é possível verificar que na questão 3 não explicou o seu raciocínio, apesar de estar no enunciado para o fazer.

O relatório foi escrito na folha de enunciado da tarefa, cuja estrutura foi seguida pelos alunos e onde constava a tabela que serviu de base à elaboração do mesmo.



1. Mede o perímetro da base de cada um dos objetos com um fio e regista na tabela.
2. Mede com a régua o diâmetro da base de cada um dos objetos e regista na tabela.

Objeto	Perímetro do círculo	Diâmetro	Perímetro:diâmetro
moeda	9 cm	2,9 cm	3,1034482
tacho	94,2 cm	30 cm	3,14
lata	25,9 cm	8 cm	3,2375
Cd	37,7	12 cm	3,1416…

3. Consegues identificar alguma relação entre o perímetro e o diâmetro da base de cada um dos objetos? Explica o teu raciocínio.

Perímetro = Diâmetro x 3 (aproximadamente)

Disseste bem que é aproximadamente x 3.
Então, qual a relação entre o perímetro e o diâmetro?

4. Imagina que o Luís se esqueceu de registar um dos valores do perímetro, tal como está na tabela:

Objeto	Perímetro do círculo	Diâmetro	Perímetro:diâmetro
panela	15,707.954	5	3,14159

a) Serás capaz de completar a tabela? Explica como procedeste.

Fiz 5 x 3,14159 = 15,70795

5. Regista as conclusões sobre o perímetro do círculo que aprendeste com esta tarefa.

Aprendi que o diâmetro é aproximadamente a terça-parte do perímetro.

Figura 37- 1ª versão do relatório escrito sobre a tarefa “Objetos circulares”

Quando foi questionado na entrevista sobre fontes de informação que utilizaram para a elaboração do relatório, o Filipe menciona apenas o caderno:

P- Mas utilizaram calculadora…
F- Sim, utilizámos calculadora.
P- E a calculadora, foi útil terem calculadora ou não?
F- Foi.
P- Porquê?
F- Tá aqui alguns números que tínhamos que fazer uma grande conta como por exemplo 5 vezes 3 nã nã nã e depois dava… depois tínhamos de fazer continuadamente até dar um resultado.
P- E facilitou a resolução da tarefa com calculadora?
F- Hum, hum.
P- E o grupo, ajudou-te a resolver ou não?
F- Ajudou.

P- Aaa… E onde é que foram buscar a informação para fazer as conclusões?
F- Ao caderno.
P- No caderno, só? Tou a perguntar… foi no caderno?
F- Sim.
P- E no livro não tinha lá informação? Pois, se calhar não foram consultar?
F- Não, não fomos.
(Entrevista a Filipe após a tarefa "Objetos circulares" em 07/03/2012)

Estratégias utilizadas

Depois de analisarem os dados, na questão 3 é pedido que identifiquem a relação entre o perímetro do círculo e o seu diâmetro, onde o aluno assume que o triplo do diâmetro é o valor do perímetro, mas não dá exemplos com dados da tabela. Consegue perceber que é o triplo, mas também não escreve que é um valor aproximado. Na explicação limita-se a apresentar uma conjetura "Perímetro=diâmetro x 3" mas não explica de onde é que surgiu o 3.

Na pergunta 4 consegue determinar o perímetro do círculo assumindo que a multiplicação é a operação inversa da multiplicação e apresenta os cálculos. Na questão 5 volta novamente a dizer, mas com palavras que há uma relação entre o perímetro do círculo e o seu diâmetro, mas volta a não ter em conta que se trata de um valor aproximado. Verifica-se nesta resposta que percebe que a multiplicação é a operação inversa da divisão pois refere-se neste caso à "terça-parte" e não a "X3" como tinha utilizado na questão 3, mas fá-lo com coerência com o que está escrito. Mesmo tendo feito o trabalho em grupo, apresentou o relatório diferente do das suas colegas e não escreveu nada que explicasse que o 3,14 é um valor aproximado ou que pode ser representado pelo π, mas na entrevista após a tarefa diz ter aprendido que

P- E o que é que aprendeste então com este relatório?
F- Aprendi… que o diâmetro era aproximadamente…
P- Aprendeste o quê?
F- Que o perímetro é igual ao diâmetro vezes…
P- Mas escreveste que era o diâmetro aproximadamente vezes 3, não é?
F- É.
P- E depois nós vimos que este valor que era quase parecido, era idêntico em qualquer um dos casos e nós até demos uma letra. Qual foi uma letra, que nós já falámos nesta letra grega.
F- 3
P- Que é o …
F- 3… ai…3,14

P- 3,14 e isso tem uma letra lembras-te qual é a letra?
F- É o pi.
(Entrevista a Filipe após a tarefa "Objetos circulares" em 07/03/2012)

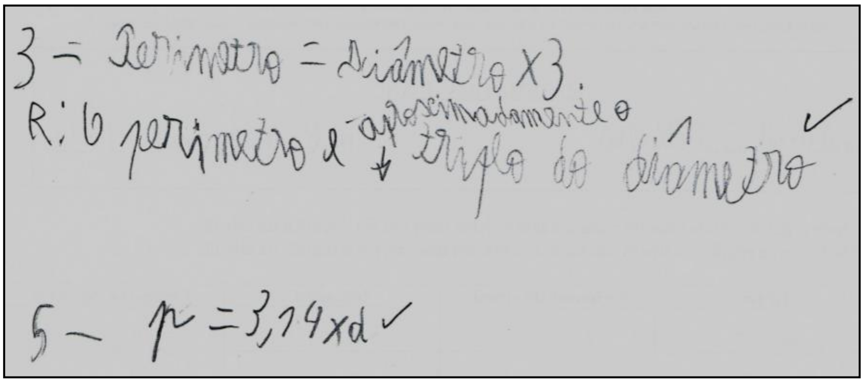


Figura 38 - 2ª versão do relatório escrito sobre a tarefa "Objetos circulares"

O Filipe utilizou a representação verbal e simbólica para se exprimir, pois na questão 3 escreveu na primeira versão que "Perímetro=diâmetrox3" e na segunda versão acrescentou que o "perímetro é aproximadamente o triplo do diâmetro", reforçando verbalmente a ideia que se trata de um valor aproximado. Contudo, não explicou nem verbalmente nem de forma simbólica como é que analisou os dados da tabela.

Na questão 5, quando se pede que apresente o que aprendeu com a tarefa dá a mesma resposta que na questão 3, mas já utiliza o valor aproximado 3,14, mas não faz qualquer explicação sobre o que significa este valor. Na primeira versão utilizou a representação verbal e posteriormente, depois de ler o feedback, utilizou a representação simbólica quando diz que "p=3,14xd".

Evolução da primeira para a segunda versão

No feedback escrito que foi dado a este relatório (figura 37) pedi que explicasse melhor a relação entre o perímetro do círculo e o seu diâmetro. Neste caso pretendia que por palavras ou símbolos explicasse por que razão é "X3", mas na segunda versão o aluno apenas associou que é "x3" porque é o "triplo". Deste modo, consegue representar a mesma ideia de duas formas diferentes, mas continua a não dar indicação nenhuma sobre o modo como analisou a tabela e onde é que foi buscar o 3, ao contrário das suas colegas que o assinalaram com um risco por baixo do 3 na tabela e o consideraram um valor aproximado.

Na segunda versão teve em conta o feedback e respondeu que "o perímetro é aproximadamente o triplo do diâmetro" (figura 38), mas não explicou como procedeu para chegar a essa conjetura, nem dá indicações que evidenciem como é que analisou os dados da tabela. Na questão 4 já cumpre com o que está no enunciado e apresenta os cálculos que efetuou para saber o perímetro do círculo. Na questão 5, leu o feedback sobre a frase "o diâmetro é a terça-parte do perímetro" (figura 37), onde lhe indiquei que o valor é aproximadamente a terça-parte e na segunda versão escreveu por notação simbólica que "p=3,14 x d". Neste caso, apesar de ter escrito o 3,14 não menciona que é o valor aproximado de π.

Jéssica

Apresentação

Quando da realização do presente estudo, a Jéssica tinha 10 anos e frequentava o 5.º ano de escolaridade, sem ter tido nenhuma retenção no seu percurso escolar. A Jéssica é uma aluna simpática, extrovertida e os seus passatempos favoritos são os jogos e a música:

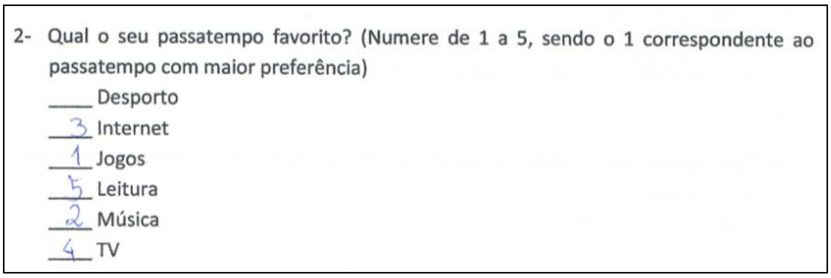
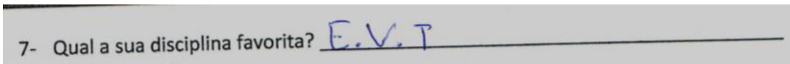

2- Qual o seu passatempo favorito? (Numere de 1 a 5, sendo o 1 correspondente ao passatempo com maior preferência)
____ Desporto
__3__ Internet
__1__ Jogos
__5__ Leitura
__2__ Música
__4__ TV

Figura 39- Resposta à questão 2 do questionário (Jéssica)

O desporto é o passatempo que considera ter menor preferência e revela uma grande predisposição para o desenho, considerando que a disciplina preferida é Educação Visual e Tecnológica:

P- Então e qual é a tua disciplina que mais gostas?
J- EVT.
P- Porquê?
J- Porque gosto mais de desenhar.

(1ª Entrevista a Jéssica em 21/10/2011)



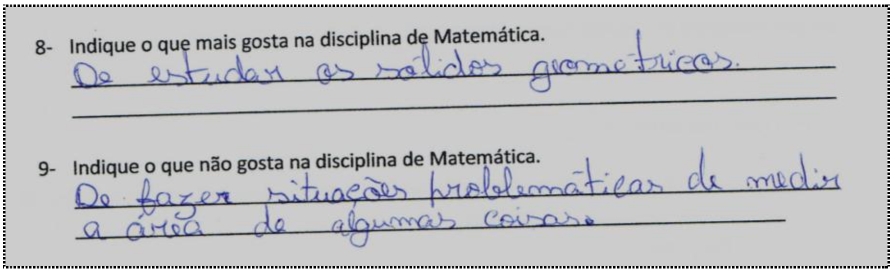
7- Qual a sua disciplina favorita? E.V.T

Figura 40- Resposta à questão 7 do questionário (Jéssica)

Embora não sendo a sua disciplina preferida, a Jéssica é uma aluna que diz gostar de Matemática, nomeadamente de "estudar os sólidos geométricos", mas não a considera a sua disciplina preferida, referindo que é necessário estudar muitos conteúdos. De acordo com o que respondeu no questionário (questão 9) não gosta de resolver problemas e medir áreas.

P- E de matemática gostas ou não?
J- Gosto
P- Pouco ou muito?
J- Mais ou menos.
P- Porquê?
J- Porque também é muita matéria para estudar e de vez em quando tenho algumas dificuldades.

(1ª Entrevista a Jéssica em 21/10/2011)

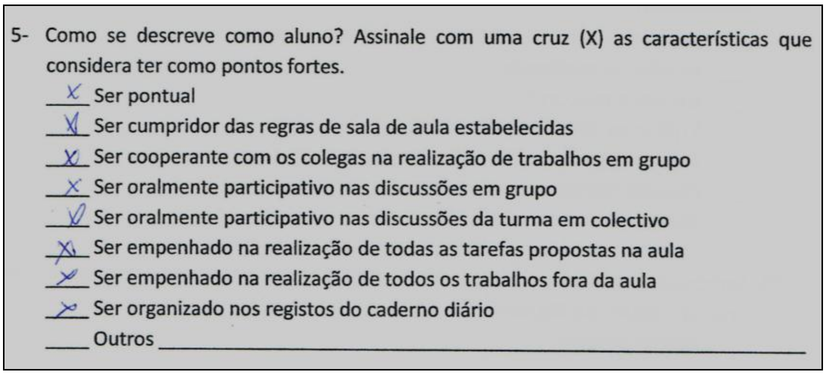


8- Indique o que mais gosta na disciplina de Matemática.
De estudar os sólidos geométricos.

9- Indique o que não gosta na disciplina de Matemática.
De fazer situações problemáticas de medir a área de algumas coisas.

Figura 41- Resposta à questão 8 e 9 do questionário (Jéssica)

Quando questionada sobre os seus pontos fortes, a Jéssica considera ser pontual, cumpridora das regras de sala de aula e empenhada na realização das tarefas dentro e fora da sala de aula, tal como se encontra evidenciado na resposta dada à questão 5 do questionário:



5- Como se descreve como aluno? Assinale com uma cruz (X) as características que considera ter como pontos fortes.

- X Ser pontual
- X Ser cumpridor das regras de sala de aula estabelecidas
- X Ser cooperante com os colegas na realização de trabalhos em grupo
- X Ser oralmente participativo nas discussões em grupo
- X Ser oralmente participativo nas discussões da turma em colectivo
- X Ser empenhado na realização de todas as tarefas propostas na aula
- X Ser empenhado na realização de todos os trabalhos fora da aula
- X Ser organizado nos registos do caderno diário
- ____ Outros ____

Figura 42- Resposta à questão 5 do questionário (Jéssica)

Para além disso, considera ser cooperante com os colegas, ser participativa nas discussões de grupo ou discussões coletivas da turma e ser organizada nos registos do caderno diário. Todas estas caraterísticas foram também referidas pelo diretor de turma, tendo por base as informações recebidas pela professora do 1.º ciclo e foram observadas durante as aulas de Matemática.

Para analisar a sua conceção sobre a matemática e a sua visão sobre a disciplina de Matemática, foi realizado um inquérito e a primeira entrevista cujos dados foram triangulados com os dados recolhidos por observação, à semelhança do que foi feito com os outros dois alunos participantes no estudo. Para a Jéssica a sua visão da matemática assenta essencialmente em cálculos e figuras geométricas e, quando estes dois conteúdos não são necessários, a aluna considera que não se trata de uma situação que envolva a matemática, o que é possível constatar com a resposta que deu depois de ter lido três questões distintas no enunciado que lhe foi facultado durante a entrevista:

> P- Então, dessas três situações, quais são as situações que te parecem ter a ver com a matemática? A 1 a 2 ou a 3? Ou todas ou nenhuma. … Vá lá…
> J- A 2.
> P- A 2? E a 1 e a 3 não?
> J- A 1 também, a 3 não.
> P- Porquê?
> J- Porque a 3 é para saber qual é a profissão das … das meninas.
> P- Então e as profissões não têm a ver com a matemática?
> J- Acho que não.
>
> (1ª Entrevista a Jéssica em 21/10/2011)

Quando foi questionada na 1ª entrevista sobre a utilidade da matemática, a aluna referiu a necessidade da disciplina de Matemática para a escolha de uma profissão:

> P- Não? Então para ti qual é a utilidade da matemática?
> J- aaa… aprender mais coisas
> P- Como, por exemplo…
> J- Áreas, perímetros…
> P- Sim…
> J- Os polígonos, contas.
> P- Sim, e mais? Mais nada?
> J- Ângulos também.
> P- Sim? Mas não achas que a matemática seja útil?
> J- Acho.
> P- Para quê?
> J- Para quando formos crescidos podermos escolher uma profissão que queremos.
>
> (1ª Entrevista a Jéssica em 21/10/2011)

Na disciplina de Matemática a Jéssica considera que é importante o professor explicar e os alunos ouvirem atentamente para perceberem melhor a matéria:

> P- Então e tu achas que em matemática o que é que para ti é melhor, é quando os alunos descobrem sozinhos ou quando é o professor a ensinar a matéria?
> J-Aaa… quando o professor ensina a matéria.
> P- Porquê?
> J- Porque quando o professor ensina a matéria …aaa… percebe-se melhor as coisas.
>
> (1ª Entrevista a Jéssica em 21/10/2011)

A aluna privilegia as aulas em que, depois de ouvirem a matéria dada pelo professor, os alunos resolvem exercícios para aplicarem o que aprenderam:

> P- Então e quando tu pensas nas aulas de matemática, o que é que tu pensas que é uma boa aula de matemática? Para ti como é que é uma boa aula de matemática?
> J- A professora dar alguma matéria e depois dar-nos exercícios para fazer.
> P- Então o que é que é para ti mais importante, são os exercícios?
> J- Não, é a professora explicar a matéria.
> P- Porquê?
> J- Porque quando a professora explica a matéria é sempre melhor para depois resolvermos as coisas e estudar.
>
> (1ª Entrevista a Jéssica em 21/10/2011)

No entanto, quando foi questionada sobre uma aula em que tenha gostado em particular, a Jéssica diz gostar das aulas em que os alunos trabalham em grupo:

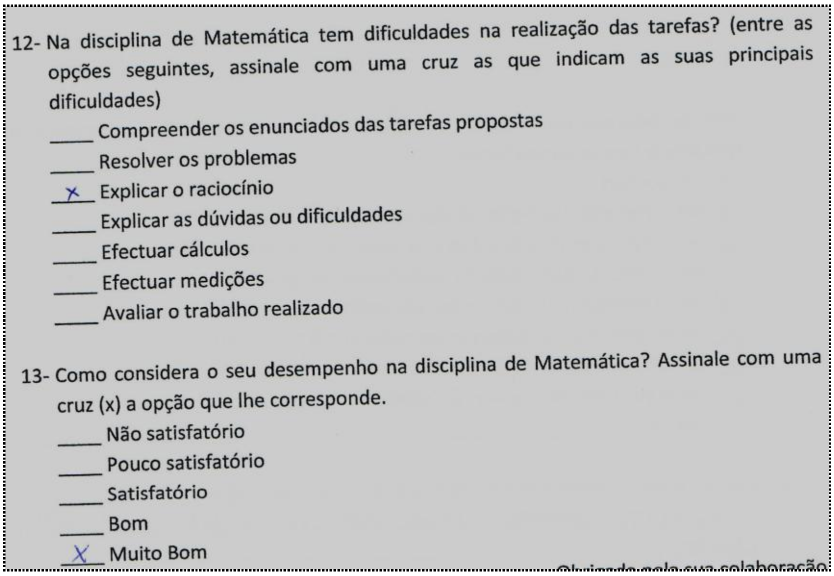
> P- Não consegues dar um exemplo de uma aula que tenhas gostado mais?
> J- aaa… As aulas em grupo. Quando se faz grupos para fazerem os trabalhos.
> P- Portanto, gostas particularmente do trabalho em grupo. Porquê?
> J- Porque podemos partilhar mais ideias …
> P- E achas que para ti isso é bom
> J- Hum, hum, sim.
> P- E achas que isso ajuda?
> J- Acho.
> P- Ajuda em quê?
> J- Em compreendermos alguns raciocínios diferentes dos nossos.
>
> (1ª Entrevista a Jéssica em 21/10/2011)

Quando respondeu ao questionário (questão 13) sobre o seu desempenho na disciplina de Matemática, a aluna referiu que é muito bom, revelando autoconfiança. Contudo, referiu também que tem dificuldade na explicação do seu raciocínio (questão

12 do questionário). Quando questionada sobre a dificuldade na explicação do raciocínio a Jéssica mencionou que prefere fazê-lo por escrito do que oralmente por ser possível voltar a ler o que escreveu para verificar se está correto. Nos casos em que se apercebe que cometeu algum erro diz tentar "resolver outra vez".

> P- E em explicar o raciocínio, consegues explicar o teu raciocínio bem ou não?
> J- Sim.
> P- E explicas melhor oralmente ou por escrito?
> J- Por escrito.
> P- E porquê?
> J- Porque quando eu estou a fazer por escrito consigo depois ler outra vez o que eu estou a fazer para depois conseguir ver se está certo ou errado.
> (…)
> P- Mas quando tu vês que cometeste um erro, o que é que costumas fazer?
> J- Tento resolver outra vez.

(1ª Entrevista a Jéssica em 21/10/2011)



12- Na disciplina de Matemática tem dificuldades na realização das tarefas? (entre as opções seguintes, assinale com uma cruz as que indicam as suas principais dificuldades)
____ Compreender os enunciados das tarefas propostas
____ Resolver os problemas
_X_ Explicar o raciocínio
____ Explicar as dúvidas ou dificuldades
____ Efectuar cálculos
____ Efectuar medições
____ Avaliar o trabalho realizado

13- Como considera o seu desempenho na disciplina de Matemática? Assinale com uma cruz (x) a opção que lhe corresponde.
____ Não satisfatório
____ Pouco satisfatório
____ Satisfatório
____ Bom
_X_ Muito Bom

Figura 43- Resposta à questão 12 e 13 do questionário (Jéssica)

Especificamente sobre a comunicação matemática, apesar de não ter referido no questionário (questão 12) que tem dúvidas na interpretação dos enunciados, na aula, por vezes, pediu ajuda para a sua compreensão:

> P- Consegues compreender o que está lá pedido num determinado enunciado? Sempre? Ou não, ou nunca tens dúvidas?
> J- Tenho
> P- Deves ter dúvidas… E quais são as razões?

J- aaa…
P- tens dificuldade na leitura?
J- Não, é mais de vez em quando na compreensão.
(1ª Entrevista a Jéssica em 21/10/2011)

Quando não consegue resolver um determinado problema na aula, a Jéssica solicita a ajuda do professor e dos colegas e quando se trata de um problema para resolver fora da aula pede ajuda aos pais:

P- O que é que tu fazes? O que é que costumas fazer quando não consegues resolver?
J- Pergunto ao professor.
P- Só ao professor?
J- Ou aos pais.
P- Sim, mas tipo, se for na situação da aula, só perguntas ao professor?
J- Ou então ao colega do lado.
(1ª Entrevista a Jéssica em 21/10/2011)

As dificuldades que diz sentir são a nível da utilização do transferidor, por não ter tido grandes oportunidades de experimentação deste objeto de medição e também a nível da memorização de alguns conteúdos (questão 6 do questionário):

P- Como, por exemplo?
J- aaa…Já tive algumas dificuldades com os ângulos
P- Em usar o transferidor ou…
J- Em fazer algumas medições dos ângulos
P- Então a usar o transferidor. Já tinhas usado?
J- aaa…O ano passado muito pouco.
(1ª Entrevista a Jéssica em 21/10/2011)

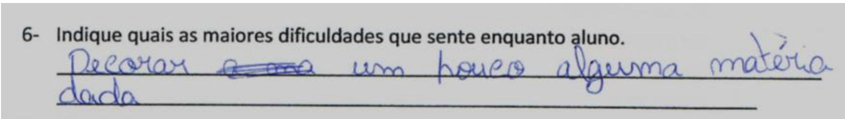

6- Indique quais as maiores dificuldades que sente enquanto aluno.
Decorar um pouco alguma matéria dada

Figura 44- Resposta à questão 6 do questionário (Jéssica)

A Jéssica associa a avaliação à situação de "teste" em que o professor verifica as dificuldades dos alunos. Para a aluna o que deve ser valorizado é a capacidade dos alunos explicarem as suas dúvidas:

P- Então e quando tu ouves falar em avaliação, o que é que te vem logo assim à cabeça?
J- Um teste.
P- Um teste. Só isso? Um teste, mais nada?
J- Mais nada.
(…)

P- Portanto quando ouves falar em avaliação… teste. E na tua opinião para que é que serve a avaliação?
J- Para os professores verem se os alunos têm dificuldades ou não.
P- Sim. Então e na matemática o que é que achas que deve ser valorizado?
J- aaa… os alunos saberem fazer as coisas e também tirarem dúvidas e fazerem perguntas.

(1ª Entrevista a Jéssica em 21/10/2011)

Especificamente sobre os relatórios escritos, o aluno menciona que lê o feedback dado pelo professor e apenas altera o que vê que é necessário modificar:

P- E quando tu recebes por exemplo um… em alguns trabalhos que recebeste com comentário escrito do professor, o que é que , sem estar classificado, o que é que tu costumas fazer?
J- Tento depois em casa tentar fazer outra vez para…
P- Mas por vezes não é em casa não é?
J- Sim, por vezes não é em casa.
P- Então quando é na aula, o que é que fazes?
J- Vejo os comentários do professor e depois, aaa…, e depois quando vou fazer outra vez faço melhor. Tento fazer melhor.
P- Então e quando fazes melhor, fazes como? Tu lês os comentários e alteras só alguns aspetos ou fazes tudo de novo?
J- Altero só alguns aspetos.

(1ª Entrevista a Jéssica em 21/10/2011)

Relatórios escritos

Tarefa 1

Durante a realização da tarefa 1 (anexo 5), a Jéssica trabalhou quase sempre individualmente, embora pontualmente tenha trocado informações com a Isabel. No entanto, oralmente não houve grande interação, pois as pequenas interações que tiveram foram feitas por troca de papéis e visualização dos rascunhos dos colegas para ver se tinham descoberto alguma possibilidade diferente de pintar a figura.

Foi solicitado pela professora que no relatório escrito não incluíssem apenas os resultados, mas também as estratégias que utilizaram para encontrar as diferentes formas de pintar a figura. Apesar de alguns alertas dados pela professora, o grupo não soube gerir o tempo disponível e não houve partilha de ideias oralmente. No entanto, quando a aluna foi questionada sobre o funcionamento do grupo, esta respondeu que o grupo tinha funcionado bem:

P- Achas que sim. E o trabalho do grupo, funcionou bem? Fizeste mais individualmente ou os teus colegas também participaram?
J- Participaram.
P- Sim, e tu também ajudaste os teus colegas?
J- Hum.

(Entrevista a Jéssica após a tarefa "Quadrados" em 28/10/2011)

Interpretação feita ao enunciado

A Jéssica leu o enunciado e interpretou-o, percebendo claramente que na primeira parte tinha de descobrir as maneiras diferentes de colorir a figura utilizando uma só cor e de descrever o critério que utilizou.

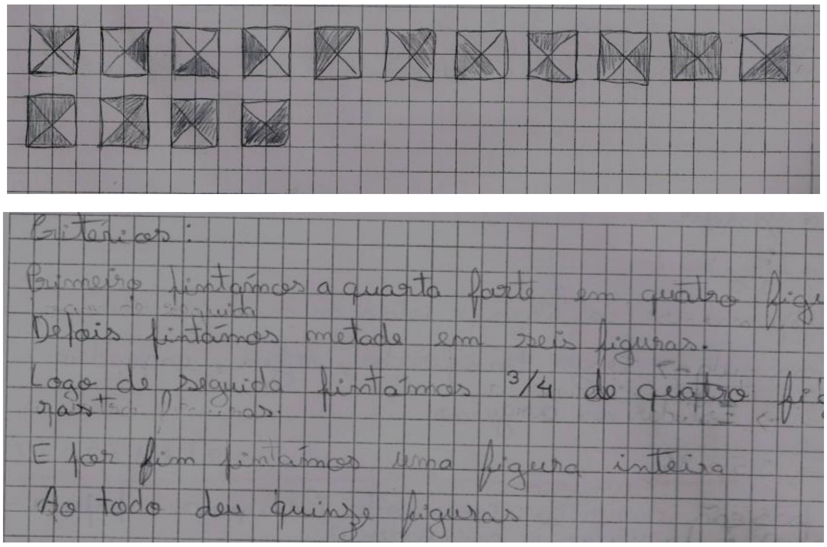


Figura 45 - 1ª versão do relatório escrito da tarefa "Quadrados" (1ªparte)

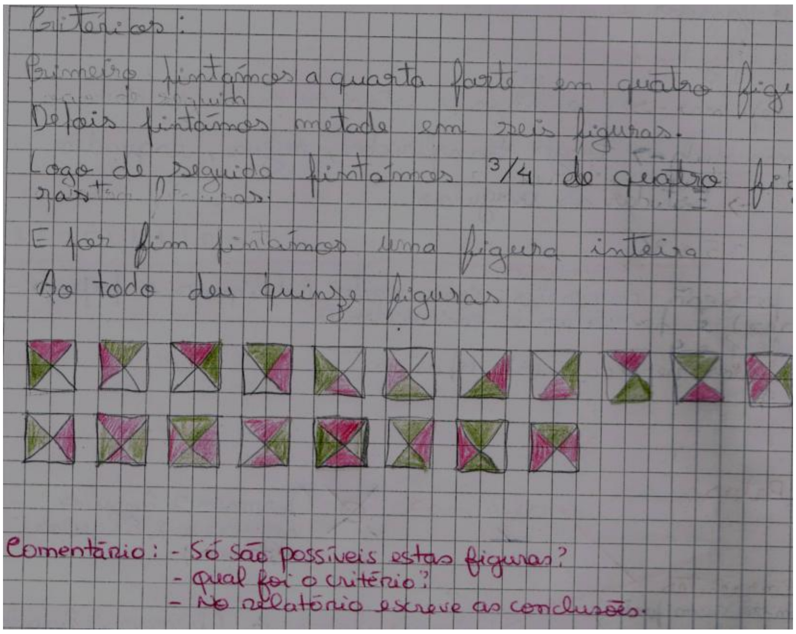


Figura 46- 1ª versão do relatório escrito da tarefa "Quadrados" (2ªparte)

Apesar de todos os elementos do grupo terem o guião e de o terem lido várias vezes, a Jéssica não incluiu no relatório uma estratégia sobre como pintar a figura utilizando duas cores, apesar de constar no enunciado da tarefa que o devia fazer.

Houve dificuldade na gestão do tempo disponível para a realização do relatório em grupo, pois as alunas levaram algum tempo a perceber o que tinham de fazer. Foi necessário lerem várias vezes o guião, uma vez que se tratava da primeira vez que faziam um relatório, o que lhes tirou tempo para a elaboração do mesmo e também porque foram fazendo o relatório à medida que foram realizando a tarefa. Para além do guião para elaboração do relatório não utilizaram mais nenhum recurso:

> P- Então e depois para fazerem o relatório, onde é que foram buscar a informação?
> J- À parte de trás da ficha.
> P- E isso é o quê?
> J- É como se faz um relatório.
> P- E daí dessa parte, o que é que vocês utilizaram?
> J- Utilizámos a introdução, o desenvolvimento, as conclusões, não é, e também identificámos.
> P- Isso é um guião, é apenas um guião, não é?
> J- Hum,hum.
> P- Sim, aqui indicaram como se faz, mas depois para saberem o que é que têm que escrever, o que é que… onde é que vocês foram buscar essa informação?
> J- Ao que nós fizemos no desenvolvimento.
> P- Portanto, com base do que fizeram no desenvolvimento escreveram… E depois nas conclusões?
> J- Nas conclusões, chegámos….
> P- Repara que aqui diz "conclusões devidamente fundamentadas". E fundamentaram, achas que fundamentaram bem o vosso relatório?
> J- Eu acho que sim.
>
> (Entrevista a Jéssica após a tarefa "Quadrados" em 28/10/2011)

Estratégias utilizadas

Ao analisar as duas versões escritas da Jéssica é possível verificar que quando foi utilizada apenas uma cor, a aluna observou a figura e viu-a como uma unidade dividida em 4 partes e tomou como estratégia pintar uma parte em posições diferentes, depois duas partes em posições diferentes e assim sucessivamente até a figura estar toda pintada. Na primeira versão, a aluna entregou o relatório incompleto. Na primeira parte, verificou com uma cor de quantas maneiras diferentes é possível pintar a figura, apresentando uma estratégia e conseguindo determinar o número de possibilidades.

Utiliza como estratégia o desenho da figura e parte do princípio que o quadrado é uma unidade e pintou a quarta-parte de maneiras diferentes, depois metade, depois os ¾ e a unidade.

> P- E o que é que fala aqui? No critério, qual foi o critério que vocês utilizaram?
> J- Pintávamos primeiro de uma cor e depois íamos rodando a figura para obtermos figuras diferentes.
> (Entrevista a Jéssica após a tarefa "Quadrados" em 28/10/2011)

Para se expressar, utilizou a representação pictórica, pois desenhou as figuras e as várias possibilidades. Ao escrever a sua estratégia, a aluna utilizou a representação verbal e simbólica, pois exprimiu-se por palavras como "quarta-parte" e "metade" , mas também utilizou a notação simbólica para fração quando diz que pintou ¾ da figura. Quando se tratou de utilizar duas cores, a Jéssica utilizou novamente a representação pictórica quando desenhou as possibilidades que encontrou e utilizou também a representação verbal para expressar a sua estratégia.

No caso em que era pedido para utilizar uma cor conseguiu determinar todas as possibilidades, mas no entanto, no caso em que era pedido para utilizar duas cores não conseguiu. Nesta última parte do relatório consegue fazer uma previsão de que é possível pintar de mais maneiras, fundamentando com o desenho de 19 maneiras diferentes na primeira versão e 27 na segunda versão, mas não tentou sistematizar os dados nem averiguar todas as possibilidades, escrevendo por representação verbal os critérios que utilizou.

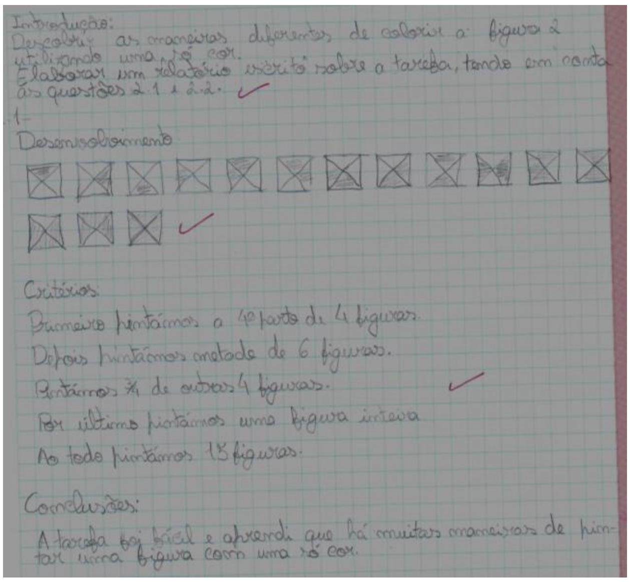

Introdução:
Descobrir as maneiras diferentes de colorir a figura 2 utilizando uma só cor.
Elaborar um relatório escrito sobre a tarefa, tendo em conta às questões 2.1 e 2.2.
1-
Desenvolvimento
Critérios:
Primeiro pintámos a 4ª parte de 4 figuras.
Depois pintámos metade de 6 figuras.
Pintámos ¾ de outras 4 figuras.
Por último pintámos uma figura inteira
Ao todo pintámos 15 figuras.
Conclusões:
A tarefa foi fácil e aprendi que há muitas maneiras de pintar uma figura com uma só cor.

Figura 47- 2ª versão do relatório escrito da tarefa "Quadrados" (1ªparte)

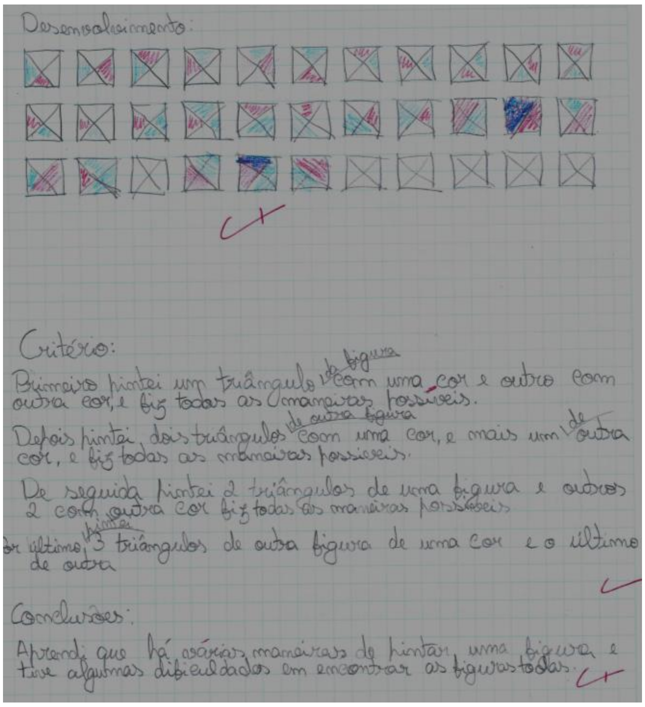


Figura 48- 2ª versão do relatório escrito da tarefa “Quadrados” (2ªparte)

Quando foi questionada sobre a realização da tarefa e a elaboração do relatório escrito, a aluna fez referência à utilização do guião, mas verifica-se que as conclusões escritas estão incompletas. A Jéssica não consegue dizer o que aprendeu com a tarefa, mas consegue perceber que com duas cores é possível pintar a figura de mais maneiras do que só com uma cor. Refere que aprendeu a pintar a figura de várias maneiras, mas não descreve como:

> P- E aprendeste o quê com este trabalho?
> J- Que há várias maneiras de pintar uma figura ou só com uma cor ou com duas e há tantas que não conseguimos até chegar a todas as figuras, a não ser que tenhamos muito tempo.
> (Entrevista a Jéssica após a tarefa “Quadrados” em 28/10/2011)

Apesar de ter escrito a estratégia que utilizaram para pintar a figura com uma só cor, quando se tratou de utilizar duas cores iniciou uma explicação, mas não foi concluída. A estratégia que utilizou na segunda versão permitiu-lhe encontrar um maior número de possibilidades de pintar a figura com duas cores, começando por pintar apenas um triângulo de cada cor, depois dois de uma cor e um de outra, e de seguida pintou dois triângulos de cada cor. Por último, também encontrou algumas possibilidades de pintar três triângulos de uma cor e um de outra. É possível verificar que foi gradualmente aumentando o número de triângulos de uma só cor e foi alternando as cores:

P- E nesse desenvolvimento o que é que vocês tinham de escrever ou nessas conclusões o que é que tinham de escrever?
J- Que… que para pintarmos não precisamos…para pintar com duas cores tínhamos de pintar ou dois triângulos… com uma só cor pintávamos dois triângulos ou três. Depois, com duas cores diferentes, alternávamos os… a cor dos triângulos.
(Entrevista a Jéssica após a tarefa "Quadrados" em 28/10/2011)

Evolução da primeira para a segunda versão

No feedback que dei a este relatório incentivei a aluna a continuar a verificar mais possibilidades de colorir a figura com duas cores e também a questionei sobre o critério que utilizou na parte em que utilizou duas cores, uma vez que não o escreveu na primeira versão (figura 46). Para além disso, também referi que deveria escrever as suas conclusões, uma vez que não escreveu nenhumas conclusões na primeira versão.

Na segunda versão, a Jéssica copiou o que tinha feito na primeira versão e acrescentou a estratégia que utilizou para determinar as possibilidades com duas cores, tendo desenhado mais possibilidades do que na versão anterior. Também escreveu as conclusões sobre a primeira parte e a segunda parte que não tinham sido escritas na primeira versão. Nestas conclusões fez referência à facilidade que teve em encontrar as diferentes possibilidades utilizando apenas uma cor e à dificuldade que teve quando utilizou duas cores. Apesar destas dificuldades, a aluna não participou ativamente nas discussões da turma e não apresentou dúvidas ou questões aos colegas. As representações utilizadas continuaram a ser a pictórica, a verbal e a simbólica, embora esta última fosse apenas usada para representar o número 2.

Tarefa 2

Nesta tarefa (cujo enunciado se encontra no anexo 6) os alunos continuaram a partilhar a informação principalmente pela visualização do trabalho dos colegas, embora pontualmente falassem. O relatório escrito que foi elaborado em grupo já respeita a estrutura indicada no guião, ou seja apresenta uma introdução, desenvolvimento e conclusões e a Jéssica considera que o grupo funcionou bem.

P- E o grupo, funcionou bem? Ou não?
J- Funcionou.
(Entrevista a Jéssica após a tarefa "Polígonos" em 17/11/2011)

Interpretação feita ao enunciado

A Jéssica leu e interpretou o enunciado da tarefa percebendo claramente que era necessário descobrir e classificar polígonos na figura inicial, tal como descrever a estratégia utilizada.

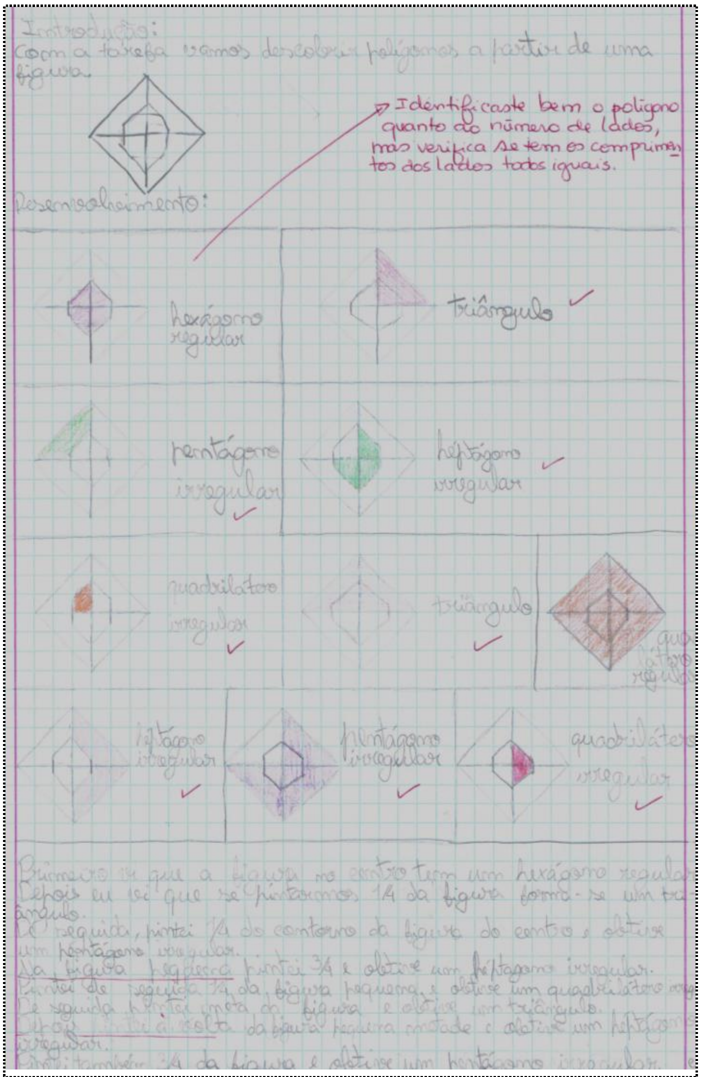


Figura 49 - 1ª versão do relatório escrito sobre a tarefa “Polígonos”

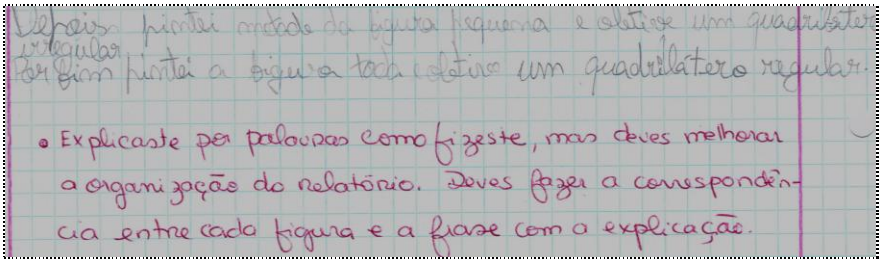


Figura 50- Continuação 1ª versão do relatório escrito da tarefa “Polígonos”

Nesta tarefa o grupo voltou a utilizar o guião de elaboração do relatório, mas ao ser questionada sobre a tarefa a Jéssica não referiu que o utilizou. No entanto, mencionou o livro e o caderno como instrumentos de pesquisa sobre os nomes dos polígonos:

> P- Onde é que foram buscar a informação para fazer este relatório?
> J- Fomos buscar esta informação aos polígonos que encontrámos e contámos o número de lados…
> P- Sim, mas para escrever o relatório, para escrever mesmo… para completar o relatório, onde é que foram buscar informação?
> J- A informação?
> P- Sim, para saberem os nomes dos polígonos que não se lembravam…
> J- Fomos ao caderno e ao livro.
> P- E perguntaste aos colegas os que não sabias? Ou sabias todos?
> J- Eu perguntei os que não sabia.
> P- E depois foram procurar aonde?
> J- Ao caderno.
>
> (Entrevista a Jéssica após a tarefa "Polígonos" em 17/11/2011)

Estratégias utilizadas

Ao analisar as duas versões escritas da Jéssica é possível verificar que a aluna descreve o que fez, pois pinta cada polígono à medida que o vai encontrando e verbalmente apresenta uma estratégia. Apesar de ter desenhado várias vezes a figura inicial e ter pintado o polígono encontrado não faz a correspondência com a respetiva descrição da estratégia. A aluna encontrou os polígonos através da pintura de frações de figuras de referência como a "figura do centro" que por vezes também chamou de "figura pequena". Na entrevista também diz ser necessário pintar os polígonos encontrados:

> P- Então nesta tarefa, diz-me lá… aqui o que é que vocês tinham de fazer aqui?
> J- Tínhamos que pintar as… os polígonos que encontrássemos.
> (Entrevista a Jéssica após a tarefa "Polígonos" em 17/11/2011)

Na segunda versão manteve a versão anterior alterando apenas a ordem das frases que escreveu para descrever a estratégia. Para além disso, também escreveu que o hexágono era irregular, ao contrário da primeira versão, em que referiu que o hexágono era regular. Para se expressar utilizou a representação pictórica ao desenhar as figuras que encontrou e nas frases em que descreve a estratégia utilizada para além da representação verbal também utiliza a representação simbólica para a fração ¼ e ¾.

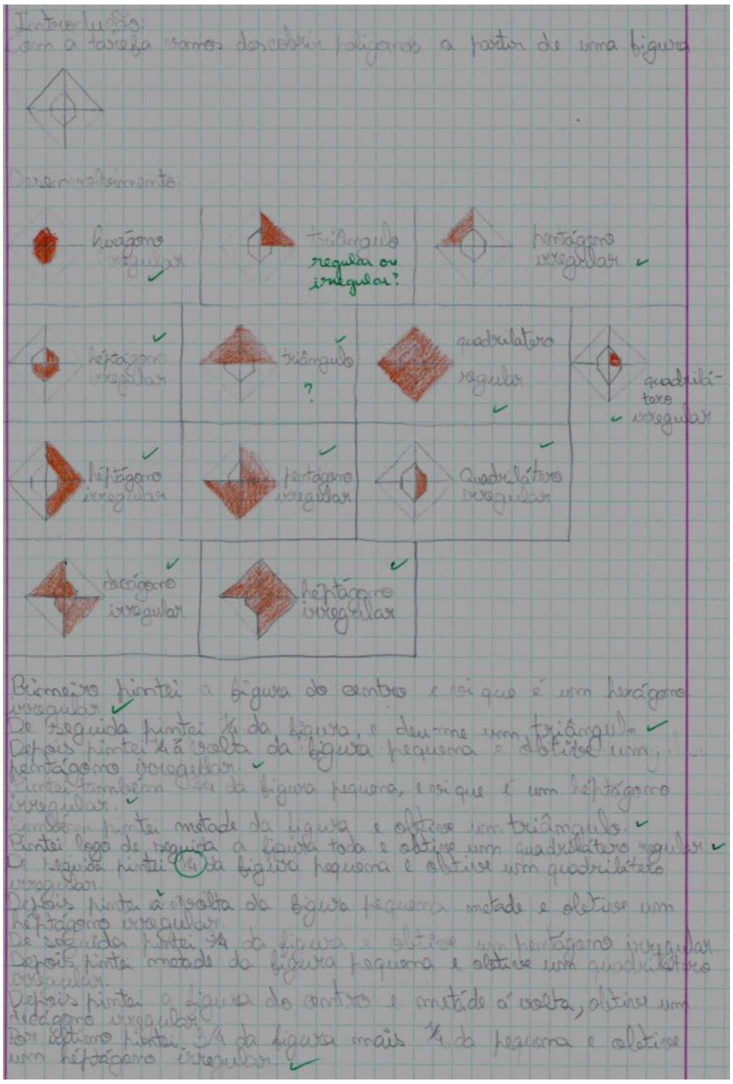


Figura 51 - 2ª versão do relatório escrito da tarefa “Polígonos”

Neste relatório a Jéssica não apresentou conclusões mas diz ter aprendido que é possível encontrar vários tipos de polígonos dentro de uma figura:

P- E o que é que aprendeste com este relatório?
J- Que dentro de uma figura podem haver vários tipos de polígonos.
(Entrevista a Jéssica após a tarefa “Polígonos” em 17/11/2011)

A aluna não escreveu as dificuldades sentidas na elaboração deste relatório e também não apresentou dúvidas ou questões aos colegas, nem participou ativamente nas discussões da turma.

Evolução da primeira para a segunda versão

No feedback que dei a este relatório (figura 50) optei por sugerir que verificasse o comprimento dos lados do hexágono para confirmar se é regular como diz na primeira versão. Para além disso referi a necessidade de aperfeiçoamento na organização do relatório, nomeadamente na correspondência entre a figura e a respetiva descrição da estratégia (figura 49). Houve evolução no primeiro aspeto assinalado no feedback, porque na segunda versão escreve que o hexágono é irregular. No segundo aspeto assinalado no feedback a evolução foi apenas na ordem das frases que descrevem a estratégia utilizada, pois ao primeiro polígono corresponde a primeira frase, ao segundo polígono a segunda frase e assim sucessivamente. No entanto, a aluna não escreveu no relatório nenhuma indicação sobre essa ordem, o que continua a ser pouco claro, pois a estratégia não acompanha o respetivo polígono. Nesta segunda versão, tal como na primeira versão, primeiro surgem todos os polígonos e só depois é que são descritas as estratégias utilizadas.

Tarefa 3

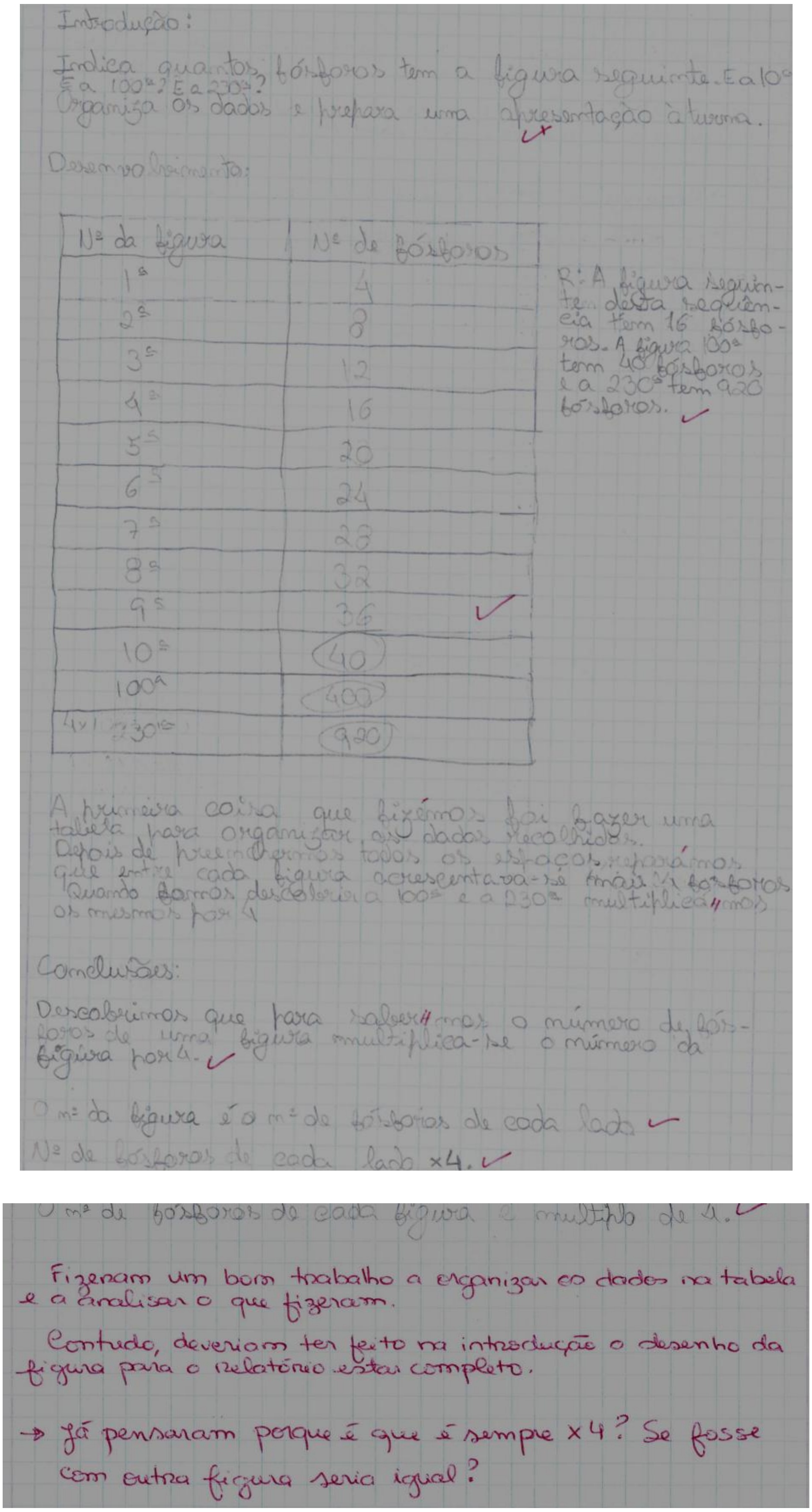
Nesta tarefa (que consta no anexo 7) que foi realizada em grupo os alunos já trocaram mais ideias. Só fizeram a construção com palitos até à figura número 13 porque logo no início o Filipe alertou logo o grupo para uma regularidade e a Isabel propôs que fizessem uma tabela, que foi utilizada para organizar os dados e verificar se o que o Filipe tinha dito estava ou não correto.

> F - anda de 4 em 4 (diz em surdina).
> I- Vamos fazer uma tabela.
> F- Eu tenho régua. E vamos fazer a lápis? (…)Ah, vais ter que fazer a tabela e agora ia dizer-te régua…
> F- não, deixa estar… é de 4 em 4 não é?(…) 11,12,13,14,15,16… afinal é de 4 em 4.
>
> (Gravação da aula da tarefa "Fósforos" em 04/01/2012)

Neste relatório escrito mantém a estrutura definida no guião, ou seja, inicia com uma introdução, faz o desenvolvimento e posteriormente escreve algumas conjeturas. Apesar de escrever algumas conjeturas, em alguns casos não dá exemplos, o que se pode verificar na figura 52.

Interpretação feita ao enunciado

A Jéssica leu e interpretou o enunciado percebendo que era necessário determinar vários termos da sequência para posteriormente escrever a sua lei de formação.



Introdução:

Indica quantos fósforos tem a figura seguinte. E a 10ª? E a 100ª? E a 230ª? Organiza os dados e prepara uma apresentação à turma.

Desenvolvimento:

Nº da figura	Nº de fósforos
1ª	4
2ª	8
3ª	12
4ª	16
5ª	20
6ª	24
7ª	28
8ª	32
9ª	36
10ª	40
100ª	400
4× 230ª	920

R: A figura seguinte desta sequência tem 16 fósforos. A figura 100ª tem 400 fósforos e a 230ª tem 920 fósforos.

A primeira coisa que fizemos foi fazer uma tabela para organizar os dados recolhidos. Depois de preenchermos todos os espaços reparámos que entre cada figura acrescentava-se mais 4 fósforos. Quando formos descobrir a 100ª e a 230ª multiplicámos os mesmos por 4

Conclusões:

Descobrimos que para sabermos o número de fósforos de uma figura multiplica-se o número da figura por 4.

O nº da figura é o nº de fósforos de cada lado

Nº de fósforos de cada lado ×4.

O nº de fósforos de cada figura é múltiplo de 4.

Fizeram um bom trabalho a organizar os dados na tabela e a analisar o que fizeram.

Contudo, deveriam ter feito na introdução o desenho da figura para o relatório estar completo.

→ Já pensaram porque é que é sempre ×4? Se fosse com outra figura seria igual?

Figura 52 - 1ª versão do relatório escrito da tarefa “Fósforos”

Estratégias utilizadas

Ao analisar as duas versões escritas da Jéssica é possível verificar que rapidamente se apercebeu que se tratava de múltiplos de 4.

> P- Pronto, tinham lá sequência não é? E tinham que indicar a figura seguinte. Então diz-me lá, o que é que vocês fizeram a partir daí? O que é que começaram a fazer em primeiro lugar?
> J- Então, se a primeira figura tinha 4 fósforos, a 2ª tinha 8, a 3ª tinha 12 e depois quando chegámos mais ou menos à 6ª vimos que… o número de fósforos da figura, multiplicava-se pelo número da figura.
> P- Então isso eram sempre números da tabuada de que número?
> J- Do 4.
> (Entrevista a Jéssica após a tarefa "Fósforos" em 06/01/2012)

Durante a realização da tarefa Jéssica percebeu que a ideia da Isabel, ou seja, incluir no relatório uma tabela, era uma ideia vantajosa para organizar e analisar os dados:

> P- Pois, vocês têm aqui na tabela muito bem. E fizeram esta tabela para quê?
> J- Para nós conseguirmos organizar os dados e percebermos o que estávamos a fazer.
> (…)
> P- Hum,hum. E o que é que aprendeste com este relatório?
> J- Que em vez de estarmos sempre a fazer uma tabela é mais fácil descobrir uma relação entre os números, entre as colunas das figuras para depois ser mais fácil para descobrirmos o número de uma figura que esteja mais longe.
> (Entrevista a Jéssica após a tarefa "Fósforos" em 06/01/2012)

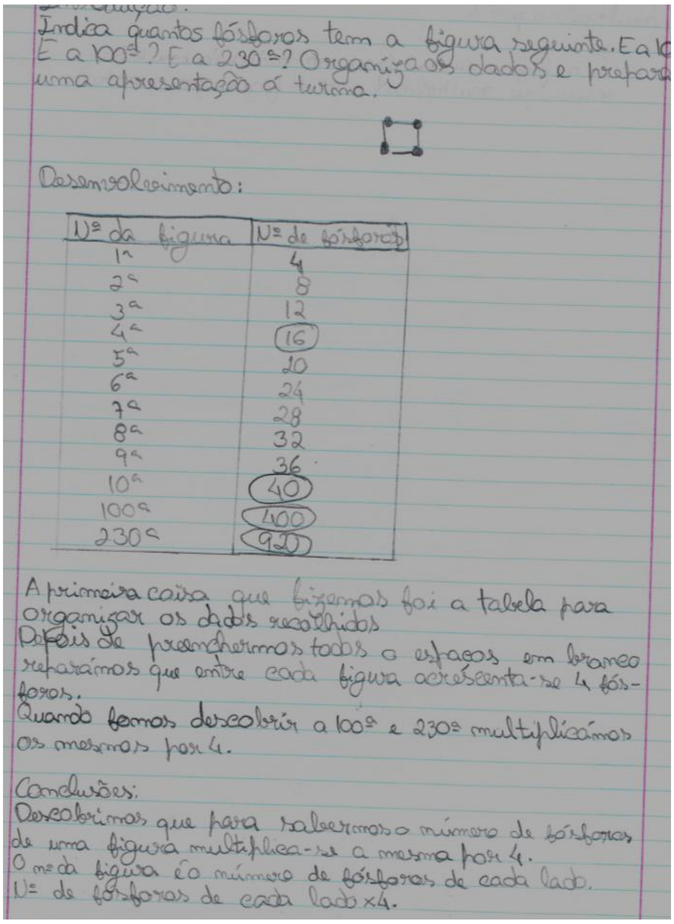
À medida que foram preenchendo a tabela com o número de fósforos de cada figura a Jéssica percebeu a relação entre as colunas da tabela, ou seja, entre o número da figura e o número de fósforos:

> P- O que é que tem uma coluna a ver com a outra?
> J- Que o número da figura multiplicado pelo número de fósforos da 1ª figura…
> P- Que é…
> J- 4.
> P- Então e se multiplicares a 2ª figura por 4, quanto é que vai dar?
> J- Vai dar 8.
> P- 3 vezes 4.
> J- 12.
> P- E por aí fora…Por isso vocês depois aqui, a partir de uma certa altura deixaram de ter que fazer a tabela, não é? Puderam saltar linhas e fazer logo, porquê?

P- Começaram a encontrar aqui o quê… uma regra, não é? Qual era a regra?
J- O número da figura vezes 4 dava o número de fósforos de uma… da figura.
(Entrevista a Jéssica após a tarefa “Fósforos” em 06/01/2012)

À semelhança dos colegas do grupo também escreveu que para determinar o número de fósforos de cada figura é necessário calcular o “número de fósforos de cada lado X 4”. Para além disso, a Jéssica também se apercebeu da relação entre o número da figura e o número de fósforos de cada lado, encontrando-se evidenciada logo na primeira versão do relatório escrito (figura 52) que “o número da figura é o número de fósforos de cada lado”.

A Jéssica utilizou a representação pictórica quando desenhou a figura inicial da sequência e a representação verbal e simbólica para escrever a lei de formação da sequência. Verbalmente explicou que o número da figura corresponde ao número de fósforos de cada lado e utilizou a representação simbólica para escrever que é sempre “X4”.



Indica quantos fósforos tem a figura seguinte. E a 1
E a 100ª? E a 230ª? Organiza os dados e prepara uma apresentação à turma.

Desenvolvimento:

Nº da figura	Nº de fósforos
1ª	4
2ª	8
3ª	12
4ª	16
5ª	20
6ª	24
7ª	28
8ª	32
9ª	36
10ª	40
100ª	400
230ª	920

A primeira coisa que fizemos foi a tabela para organizar os dados recolhidos
Depois de preenchermos todos o espaços em branco reparámos que entre cada figura acrescenta-se 4 fósforos.
Quando fomos descobrir a 100ª e 230ª multiplicámos os mesmos por 4.

Conclusões:
Descobrimos que para sabermos o número de fósforos de uma figura multiplica-se a mesma por 4.
O nº da figura é o número de fósforos de cada lado.
Nº de fósforos de cada lado x4.

Figura 53 - 2ª versão do relatório escrito da tarefa “Fósforos”

Evolução da primeira para a segunda versão

No feedback que dei a esta primeira versão do relatório escrito (figura 52) procurei que a Jéssica refletisse sobre a razão de serem múltiplos de 4 e durante a entrevista voltei a questioná-la sobre a razão de ter escrito que era sempre "X4". No entanto, não houve uma evolução da primeira para a segunda versão, pois a aluna não explicou por que razão tinha de multiplicar por 4 e não por 5 ou 6. Para além disso, no feedback também consta a necessidade de melhorar a introdução do relatório, o que se verificou na segunda versão, pois a Jéssica desenhou a figura inicial da sequência na introdução.

Tarefa 4

A tarefa (que consta no anexo 8) foi realizada em grupo e a estrutura do relatório escrito teve como orientação as questões do manual. Os alunos fizeram a tarefa em grupo, mas não partilharam oralmente a informação, existindo apenas partilha de informação por observação dos rascunhos dos colegas do grupo. A aluna não participou ativamente nas discussões da turma e não apresentou dúvidas ou questões no grupo. No entanto, na sua opinião o grupo funcionou bem e refere que quando teve dúvidas solicitou a ajuda dos colegas do grupo:

> P- E o grupo funcionou bem ou não?
> J- Em… sim.
> P- Sim? E quem é que deu ideias?
> J- Demos todos.
> P- Funcionaram todos bem?
> J- Hum,hum.
> P- Então e quando tinhas dúvidas?
> J- Pedia ajuda à… a uma colega e se eles também não percebessem depois chamávamos a professora.
> (Entrevista a Jéssica após a tarefa "Crivo de Eratóstenes" em 16/01/2012)

Interpretação feita ao enunciado

A Jéssica leu e interpretou o enunciado, percebendo que era necessário organizar os múltiplos por cores. Por este motivo, à semelhança do que fez a sua colega Isabel, em vez de ir simplesmente riscando os múltiplos à medida que os foi encontrando a aluna fez uma legenda onde a cada cor corresponde um determinado múltiplo.

Durante a realização da tarefa, apesar de terem o livro à sua disposição, os alunos preferiram perguntar-me o que são números primos, razão pela qual sugeri a consulta do manual onde leram a definição de número primo. No entanto, quando foi questionada sobre as fontes de informação que utilizou, a Jéssica diz não ter utilizado o livro

P- Agora diz-me lá uma coisa, e no livro, não foram ver nada ao livro?
J- Que eu me lembre acho que não.
P- E do caderno, não foram ver nada ao caderno? Fizeram tudo de cabeça?
J- O caderno acho que já fomos, o livro não.
(Entrevista a Jéssica após a tarefa "Crivo de Eratóstenes" em 16/01/2012)

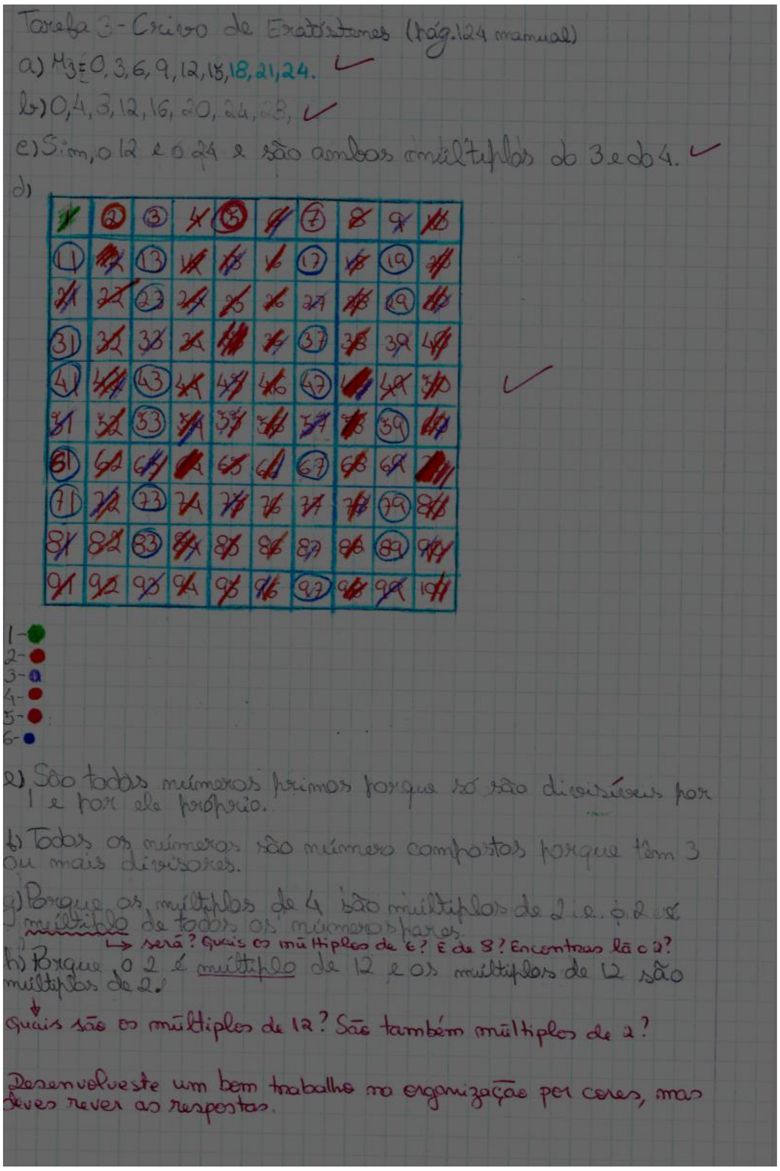


Figura 54- 1ª versão do relatório escrito da tarefa "Crivo de Eratóstenes"

Estratégias utilizadas

Ao analisar as duas versões escritas da Jéssica é possível verificar que a aluna organizou os dados por cores, consoante os múltiplos que foi encontrando. A Jéssica rodeou os números 2,3,5 e 7 e legendou os múltiplos por cores riscando os números com a cor correspondente. Na resposta à alínea e, onde se pretendia que explicasse o que os números que estão rodeados têm em comum a aluna deu a resposta com base na informação que foi pesquisar no manual, ou seja, na definição de número primo e escreveu que estes números "só são divisíveis por 1 e por ele próprio" (figura 54). Contudo, não apresentou exemplos que validem a sua afirmação.

Na alínea f, em que tinha de justificar por que razão os números riscados não são primos, escreveu apenas que são "compostos porque têm 3 ou mais divisores". Neste caso, baseou-se na definição de número composto, mas não deu exemplos para complementar a sua resposta. Na alínea g, em que tinham de explicar por que razão não era necessário riscar o 4 e todos os seus múltiplos, a Jéssica escreveu que "os múltiplos de 4 também são múltiplos de 2", mas também diz que "o 2 é múltiplo de todos os números pares", o que não acontece. Na segunda versão também não altera a sua afirmação, apesar de estar indicado no feedback para verificar nos múltiplos de 6 e de 8 se lá se encontra o 2. Na alínea h, quando é necessário justificar a razão de todos os múltiplos de 12 já estarem riscados, a Jéssica escreve "o 2 é múltiplo de 12 e os múltiplos de 12 são múltiplos de 2" sem dar exemplos. Apesar do feedback (figura 54) sugerir que verifique os múltiplos de 12 e os múltiplos de 2, na segunda versão (figura 55) a Jéssica apenas indica quais são os múltiplos de 12, mas não altera a resposta que deu na primeira versão. Para além disso escreveu a resposta das alíneas i e j que não tinha sido feito na primeira versão do relatório, onde explica por que razão o 90 e o 135 não são primos e escreve respetivamente em cada um dos casos exemplos de divisores para validar a sua afirmação "não é primo porque tem mais de 2 divisores".

Quando foi questionada sobre o que aprendeu na tarefa a Jéssica respondeu que:

J- Que o 2 é divisível por todos os números pares, o 4 é por quase todos os números pares…
P- Divisível, ou os números pares é que são divisíveis?
J- Os números pares é que são divisíveis.
P- Por…
J- por 4… por 2 e o 4 é quase todos.
P- São só alguns não é?

J- São só alguns…
P- Mas há algum ímpar que seja divisível por 4?
J- Não.
(Entrevista a Jéssica após a tarefa “Crivo de Eratóstenes” em 16/01/2012)

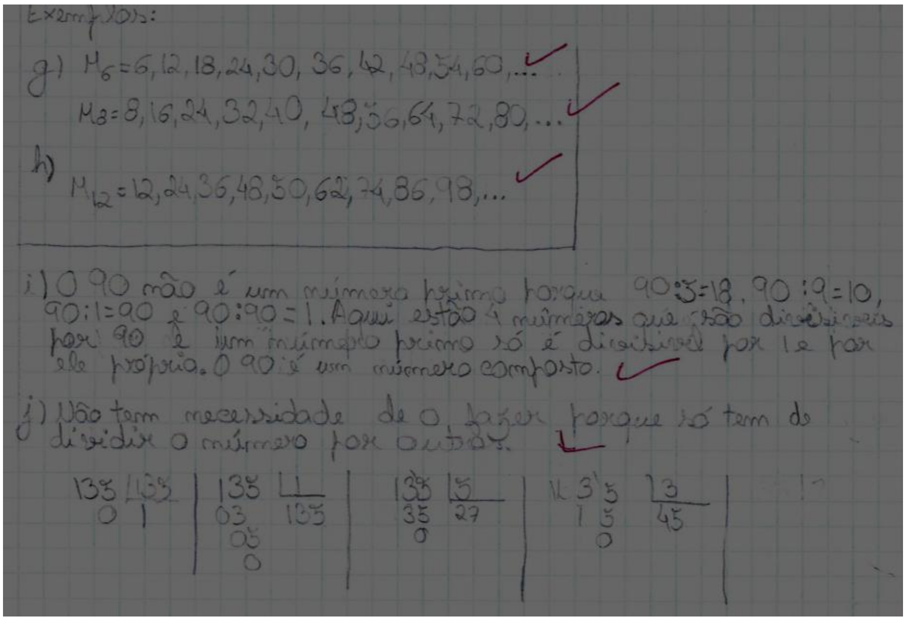


Figura 55- 2ª versão do relatório escrito da tarefa “Crivo de Eratóstenes”

A Jéssica utilizou a representação verbal e simbólica. Na alínea e) e f) apenas utilizou a representação verbal e na alínea g já utilizou também a representação simbólica quando escreveu os múltiplos de 2 e 4, tendo rodeado todos os múltiplos de 4 e os múltiplos de 2 que são comuns. Na alínea h utilizou apenas a representação verbal na primeira versão, mas na segunda versão já utilizou também a representação simbólica. Nas alíneas i e j, que só fez na segunda versão do relatório, utiliza a representação verbal e a representação simbólica.

Evolução da primeira para a segunda versão

No feedback escrito a este relatório (figura 54) salientei a necessidade de fundamentar as respostas e sugeri que utilizasse exemplos do que está a escrever para defender a sua ideia. A Jéssica leu o comentário e completou o relatório inicial, dando exemplos de múltiplos de 12 para complementar a resposta dada à alínea h. No entanto, não modifica a afirmação, continuando a afirmar que “o 2 é múltiplo de 12”(figura 55). Para além disso, na alínea i, tal como a Isabel, também viu que era necessário dar exemplos para fundamentar a sua resposta e apresentou quatro divisões exatas do número 90 para complementar a sua afirmação quando diz que “o 90 não é um número primo” (figura 55). Nesta alínea utilizou apenas quatro exemplos, porque assim já está a utilizar mais do que 2 divisores. Por último, na alínea j também apresentou quatro divisões exatas para fundamentar o que escreveu, ou seja que o 135 não é primo e para o justificar é apenas necessário “dividir o número por outros”(figura 55).

Tarefa 5

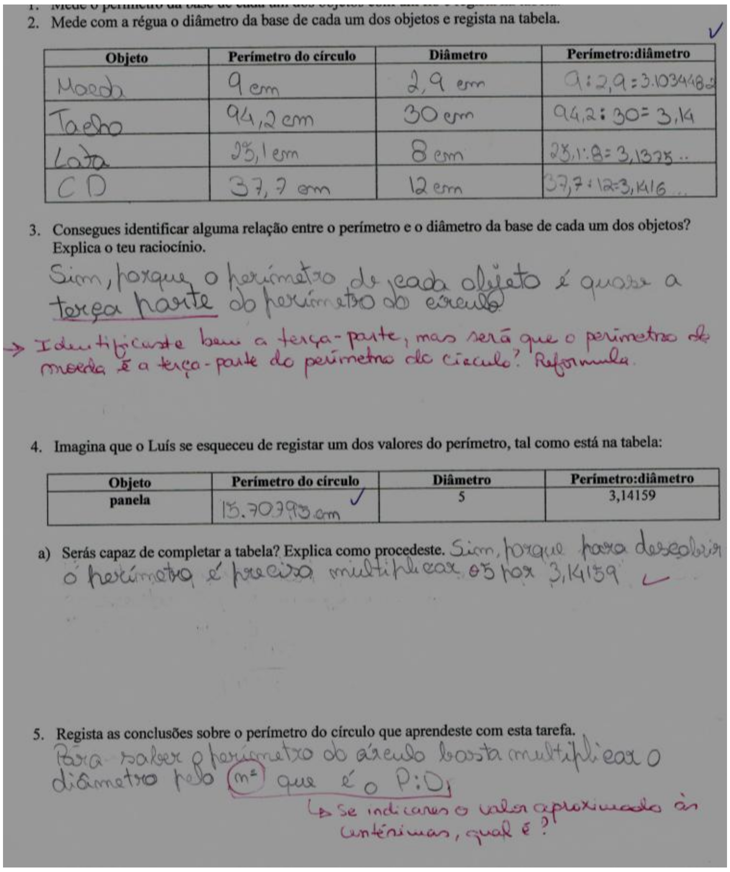
Esta tarefa (cujo enunciado consta no anexo 9) foi realizada em grupo e os alunos começaram por medir com um fio o perímetro do círculo. Cada um dos grupos fez a medição do perímetro e diâmetro de um dos objetos que foi partilhado com os restantes grupos, o que permitiu rapidamente preencher a tabela. Só posteriormente é que foram analisar os dados que tinham recolhido e responderam às questões colocadas no enunciado. Este relatório escrito foi feito na folha de enunciado da tarefa, cuja estrutura foi seguida pelos alunos e onde constava a tabela que foi preenchida com os valores do diâmetro e do perímetro dos círculos.

Interpretação feita ao enunciado

A Jéssica leu e interpretou o enunciado da tarefa percebendo que era necessário analisar os dados da tabela para perceber a relação entre o perímetro do círculo e o seu diâmetro. Quando foi questionada sobre o modo de preenchimento da tabela a aluna demonstra que sabia o que era o diâmetro, mas apresentava algumas dúvidas em relação ao perímetro e é possível verificar que ainda faz confusão entre área e perímetro:

P- E o que é que tinham de escrever aqui?
J- O diâmetro do círculo.
P- Sim, e aqui na última coluna da tabela? Era o quê?
J- Era o … era a área… não…era o perímetro

(Entrevista a Jéssica após a tarefa “Objetos circulares em 07/03/2012)


2. Mede com a régua o diâmetro da base de cada um dos objetos e regista na tabela.

Objeto	Perímetro do círculo	Diâmetro	Perímetro:diâmetro
Moeda	9 cm	2,9 cm	9:2,9=3.103448
Tacho	94,2 cm	30 cm	94,2:30=3,14
Lata	25,1 cm	8 cm	25,1:8=3,1375..
CD	37,7 cm	12 cm	37,7:12=3,1416...

3. Consegues identificar alguma relação entre o perímetro e o diâmetro da base de cada um dos objetos? Explica o teu raciocínio.

Sim, porque o perímetro de cada objeto é quase a terça parte do perímetro do círculo

→ Identificaste bem a terça-parte, mas será que o perímetro da moeda é a terça-parte do perímetro do círculo? Reformula.

4. Imagina que o Luís se esqueceu de registar um dos valores do perímetro, tal como está na tabela:

Objeto	Perímetro do círculo	Diâmetro	Perímetro:diâmetro
panela	15.70795 cm	5	3,14159

a) Serás capaz de completar a tabela? Explica como procedeste. Sim, porque para descobrir o perímetro é preciso multiplicar o 5 por 3,14159

5. Registas as conclusões sobre o perímetro do círculo que aprendeste com esta tarefa.

Para saber o perímetro do círculo basta multiplicar o diâmetro pelo nº que é o P:D;

Se indicares o valor aproximado às centésimas, qual é?

Figura 56 - 1ª versão do relatório escrito da tarefa “Objetos circulares”

Estratégias utilizadas

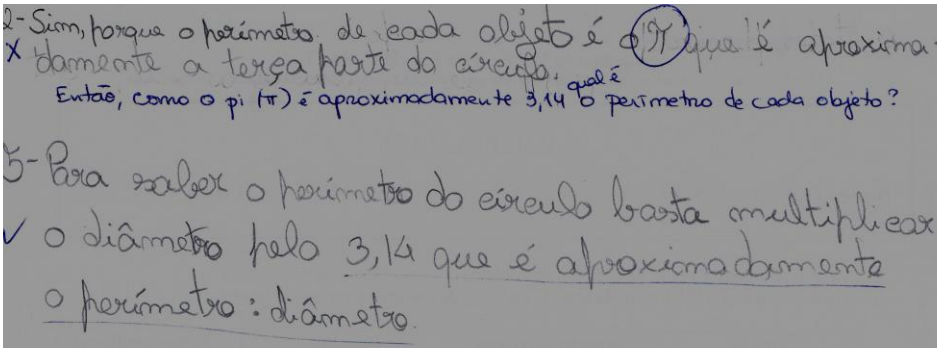
Com o auxílio da calculadora o grupo fez o quociente entre o perímetro de cada objeto circular e o seu diâmetro. De seguida foram analisar os dados obtidos e chegaram a uma relação entre estas duas grandezas, ou seja, que o perímetro é aproximadamente o triplo do diâmetro. A Jéssica percebeu que era a terça-parte, mas confunde diâmetro com perímetro.

> P- Então e daqui tu escreveste que havia uma relação entre o diâmetro…entre o diâmetro e o perímetro “Sim, porque o perímetro de cada objeto é quase a terça-parte do perímetro do círculo”.
> J- Hum,hum.
> P- Portanto, o que é que tu querias dizer com isto? Explica-me lá.
> J- Que o perímetro do objeto é … se nós multiplicarmos pelo diâmetro vai-nos dar aproximadamente o…
> P- Então, qual é o perímetro de um objeto, da moeda, por exemplo.
> J- 9 cm.
> P- Sim. E ias multiplicar isso por quanto?
> J- Por…3 ponto 10
> P- Então, mas aqui não mutiplicaste, aqui era o quê?
> J- Era a divisão.

P- Então?
J- Mas se nós multiplicássemos este (e aponta para a última coluna)…
P- Ah, o resultado.
(Entrevista a Jéssica após a tarefa "Objetos circulares em 07/03/2012)

A Jéssica utilizou a representação verbal e simbólica. Utiliza a representação verbal para explicar como é que chegou ao 15,7, começando a explicar que teria de ser o produto de 5 com o valor da última coluna. Na segunda versão (figura 57) diz que o perímetro é a terça-parte do círculo, mas refere que é o π. No entanto, quando se trata de efetuar cálculos na questão 5 diz claramente que o perímetro do círculo é o diâmetro a multiplicar por 3,14, mas não é claro que atribui esse valor a π. No entanto, na entrevista assume que o valor de π é 3,14:

P- Então e qual é o valor do pi?
J- 3,14.
(Entrevista a Jéssica após a tarefa "Objetos circulares em 07/03/2012)


2- Sim, porque o perímetro de cada objeto é o π que é aproximadamente a terça parte do círculo.
X
Então, como o pi (π) é aproximadamente 3,14 qual é o perímetro de cada objeto?

5- Para saber o perímetro do círculo basta multiplicar o diâmetro pelo 3,14 que é aproximadamente o perímetro : diâmetro.
✓

Figura 57- 2ª versão do relatório escrito da tarefa "Objetos circulares"

Na conclusão final apresenta uma conjetura sobre o perímetro do círculo, mas não verifica com exemplos.

Evolução da primeira para a segunda versão

No feedback que dei a este relatório escrito (figura 56) pretendia que a aluna corrigisse a frase ou encontrasse uma outra forma para explicar por que razão está envolvida a terça-parte. No entanto, na segunda versão (figura 57) a Jéssica escreve que "o π é aproximadamente a terça-parte do círculo" quando deveria referir-se ao diâmetro. A aluna baseou-se apenas em valores da tabela e mais uma vez, assume que o perímetro é a terça-parte do círculo. No entanto, na questão 5 consegue dizer que o perímetro do círculo resulta do produto do diâmetro por 3,14, mas não assume que o 3,14 é o valor aproximado de π.

Capítulo VII

Conclusões

Neste capítulo é apresentada uma breve síntese do estudo na qual consta o objetivo e questões orientadoras, a metodologia e o contexto pedagógico. São também apresentadas as principais conclusões do estudo que resultaram da análise dos dados. Na parte final faço também referência a algumas limitações que acompanham esta investigação.

Síntese do estudo

O presente estudo procura compreender e analisar o contributo das produções escritas em Matemática de alunos do 2º.ciclo, quando acompanhadas de feedback fornecido pelo professor, para o desenvolvimento da sua comunicação escrita matemática, tendo em conta as seguintes questões orientadoras:

1 - Quais as representações mais frequentemente usadas por alunos do 2.º ciclo na comunicação escrita matemática dos registos escritos?

2 - Quais as principais dificuldades evidenciadas por alunos do 2.º ciclo na comunicação escrita matemática dos registos escritos? De que forma os registos escritos permitem aos alunos identificá-las e como procuram ultrapassá-las?

3 - De que forma a utilização de comentários do professor às produções dos alunos (feedback) contribuem para o aperfeiçoamento da comunicação escrita matemática em alunos do 2.º ciclo?

4 - De que modo evolui a comunicação matemática em alunos do 2.º ciclo ao longo dos registos escritos?

Na elaboração das tarefas procurei que elas tivessem características diferentes e que não só permitissem aos alunos adquirirem conhecimento, mas também que permitissem experimentar, explorar e comunicar sobre a matemática. Desta forma, procurei que os alunos se envolvessem na criação da sua própria matemática (Bishop & Goffree, 1986) e na gestão das tarefas a utilizar neste estudo incluí um problema (tarefa 1), uma investigações (tarefa 3) e explorações (tarefa 3, 4 e 5). Embora também tenha permitido aos alunos a realização de exercícios, não incluí este tipo de tarefas no estudo por serem fechadas e terem um processo de resolução rápido (Ponte, 2005). No caso dos exercícios utilizei apenas o feedback oral e no caso das restantes tarefas utilizei o feedback escrito e oral para que os alunos aperfeiçoassem a segunda versão dos seus relatórios escritos. Durante a realização das tarefas apresentadas neste estudo a metodologia de trabalho utilizada pelos alunos foi o trabalho de grupo.

Para a concretização desta investigação seguiu-se uma abordagem qualitativa tendo como design de investigação o estudo de caso, uma vez que os dados foram recolhidos em sala de aula e pretendia-se que este estudo apresentasse um caráter descritivo e interpretativo, por ser o que se adequava ao estudo e às questões formuladas, uma vez que se procurou compreender e analisar o contributo das produções escritas em Matemática, quando acompanhadas de feedback fornecido pelo professor, para o desenvolvimento da comunicação escrita matemática de alunos do 2º.ciclo. Foram realizados três estudos de caso, correspondentes a cada um dos alunos (Filipe, Jéssica, Isabel), cuja perspetiva foi analisada para que pudesse traçar uma linha estratégica que me permitisse ajudar os alunos a evoluírem nas suas aprendizagens e no desenvolvimento da comunicação escrita matemática (Bogdan & Biklen, 1994). A escolha do estudo de caso como design de investigação também se deve à necessidade de compreender uma situação particular e não a uma generalização de conclusões (Ponte, 2006). Os alunos selecionados apresentam diferentes desempenhos matemáticos, estão pela primeira vez no quinto ano e não apresentam necessidades educativas especiais.

Relativamente ao contexto pedagógico deste estudo foi importante a produção de um guião de elaboração do relatório escrito, uma vez que os alunos nunca tinham realizado nenhum. A estrutura pretendida para o relatório era a seguinte: introdução, desenvolvimento e conclusão. A primeira versão do relatório foi elaborada em grupo e a segunda versão foi elaborada individualmente após a leitura do feedback.

A recolha de dados foi variada tendo sido feita a triangulação das duas versões dos relatórios escritos sobre as tarefas com as entrevistas, com a gravação áudio das aulas onde os alunos participaram nas tarefas e elaboração dos relatórios, com informações do diário de bordo resultante de observação participante. Por ser uma observação participante houve uma relação entre o observador e os observados (Cohen & Manion, 1994).Os dados foram recolhidos numa turma por mim lecionada, tendo assim assumido um papel de professora-investigadora e selecionado as tarefas sobre as quais os alunos elaboraram os respetivos relatórios escritos. Por este motivo, esta investigação também permitiu que refletisse sobre a minha prática profissional de forma a permitir uma melhoria nas aprendizagens dos meus alunos.

A cada um dos alunos foi feita uma entrevista individual no início do estudo e foram feitas entrevistas individuais depois dos alunos realizarem a tarefa e elaborarem o relatório escrito. As tarefas foram selecionadas por mim e o relatório escrito sobre as mesmas foi sujeito ao feedback escrito por mim e devolvido aos alunos para que aperfeiçoassem a sua produção escrita. Após a recolha, os dados foram analisados de acordo com as características de análise: interpretação feita ao enunciado, estratégias utilizadas e evolução da primeira para a segunda versão.

Principais conclusões

Neste estudo o relatório escrito foi de grande importância porque nesta produção escrita os alunos descreveram e refletiram sobre a atividade que desenvolveram durante as tarefas, o que permitiu articulação de ideias, explicação de procedimentos e crítica sobre os procedimentos e resultados, desenvolvendo capacidades como o raciocínio, a comunicação, a reflexão e o espírito crítico (Abrantes *et al*, 1997, Menino, 2004).

Através da elaboração dos relatórios os alunos interpretaram corretamente o enunciado em todas as tarefas e descreveram as estratégias usadas na realização de cada uma das tarefas. Para fundamentarem os seus resultados recorreram principalmente à representação verbal, complementada por vezes pela representação simbólica, principalmente para representar quantidades ou algoritmos, o que sugere que houve uma transformação de representações semióticas (Duval, 2003). Na tarefa 3 a Isabel fez a conversão da representação verbal “múltiplos de 4” para a representação simbólica “X4”. Na tarefa 4 houve tratamento de representações (Duval, 2003) quando a Jéssica e a Isabel utilizaram o algoritmo da divisão para apresentar exemplos de divisores do 90 e do 135 que justificasse a razão de não serem primos. No caso da tarefa 3 a tabela foi importante para a organização dos dados e possibilitou aos alunos estabelecerem uma relação entre o número da figura e o número de fósforos de cada uma, existindo comparações entre estas duas colunas, o que implicou um maior esforço cognitivo (Duval, 2002). A representação pictórica foi utilizada nas tarefas 1 e 2 porque envolvia os polígonos e a representação simbólica foi em alguns casos apenas utilizada para representar um número e a

O facto de os alunos explicarem por escrito os processos e resultados matemáticos fez com que o nível de exigência fosse superior ao da realização da própria tarefa (Pinto & Santos, 2006), o que promoveu a sua capacidade de reflexão, o desenvolvimento da sua capacidade de comunicação matemática e também a sua capacidade de autoavaliação. Uma das dificuldades apresentadas pelos alunos ao longo das cinco tarefas foi a gestão do tempo para as mesmas e posteriormente a elaboração do relatório escrito, tendo-se verificado que na tarefa 1 e 4 algumas questões só foram respondidas na segunda versão. Para ultrapassarem esta dificuldade os alunos utilizaram em todos os relatórios o guião de elaboração do mesmo e pediram ajuda aos colegas, embora pontualmente. Outra das dificuldades foi a apresentação de exemplos que permitissem a validação das suas afirmações, tendo-se verificado que à medida que foram realizando os relatórios foram incluindo com maior frequência exemplos para justificar as suas respostas. No entanto, é de referir que o aluno Filipe foi o que teve os relatórios mais incompletos e não evoluiu quanto à atribuição de exemplos às suas afirmações. A Jéssica e a Isabel foram evoluindo da primeira para a segunda versão dos relatórios tendo incluído exemplos nas tarefas 3,4 e 5, depois de lerem o feedback. Na tarefa 4, estas alunas não responderam às alíneas i e j na primeira versão, mas quando elaboraram a segunda versão do relatório responderam em fase única a estas alíneas, apresentando exemplos de divisões para justificar a razão do 90 e do 135 não serem números primos. Destaca-se porém, pela negativa, o facto da maioria dos relatórios não incluir as dificuldades sentidas durante a atividade.

Analisando a evolução que os alunos tiveram da primeira para a segunda versão em todas as tarefas é possível verificar que acederam às ideias apresentadas no relatório na primeira versão e utilizaram-nas para aumentar a sua capacidade de pensamento matemático (NCTM, 2007), principalmente a Isabel, pois foi a aluna que revelou ter tido maior evolução em todas as tarefas. Individualmente cada aluno apresentou um percurso próprio e o Filipe foi o aluno que evoluiu menos e apenas na tarefa 5 é possível constatar-se uma evolução positiva do Filipe pois nas restantes tarefas as alterações foram pouco significativas

A Jéssica apresentou uma evolução positiva apenas na tarefa 1. Na tarefa 2 esta aluna não melhorou a estrutura do relatório, apesar de no feedback ter sido solicitado que acompanhasse cada polígono da respetiva explicação e alterou apenas a categoria do hexágono de “regular” para “irregular”. Na tarefa 3 a segunda versão apresentada é igual à primeira, mas foi copiada para outra folha. Nas tarefas 4 e 5 a evolução foi parcial, tendo feito na tarefa 4 apenas uma indicação dos múltiplos de 12 sem os relacionar com os múltiplos de 2. Por último, na tarefa 5 continua a evidenciar confundir diâmetro com perímetro do círculo.

A Isabel apresentou uma evolução significativa pois é possível visualizar uma evolução positiva em todas as tarefas não só em relação aos aspetos relacionados com a comunicação escrita matemática, mas também com a organização do próprio relatório escrito. Ao longo dos cinco relatórios é possível detetar uma melhoria no produto final apresentado, uma vez que descreve e explica as estratégias que utilizou e as suas conclusões são escritas cada vez de forma mais completa, clara e organizada. Para além disso, em alguns casos conseguiu representar ideias de diversas formas, como é o caso da tarefa 2 em que consegue explicar como pensou para encontrar os polígonos na figura inicial, utilizando a representação icónica para representar a ideia de rotação, que também foi explicada verbalmente (Bruner, 1999; Ponte & Serrazina, 2000). Na tarefa 3 a Isabel foi a única aluna que conseguiu explicar por que razão a lei de formação envolve múltiplos de 4. Durante a realização da tarefa utilizou, tal como os seus colegas, a estratégia de rodear a décima e centésima figura, tomando-as como figuras de referência e a partir daí percebeu que o número de fósforos da figura era múltiplo de 4. No entanto, do grupo foi a única aluna que explicou verbalmente que se tratavam de múltiplos de 4 porque a figura inicial era um quadrado e na segunda versão explica que se fosse um pentágono seriam múltiplos de 5 e se fosse um hexágono seriam múltiplos de 6. Assim, neste caso a aluna relacionou as representações internamente e descreveu externamente por representação verbal o que descobriu (Goldin & Kaput,1994).

Reflexão final

Nesta investigação o trabalho realizado permitiu-me refletir sobre a minha prática letiva e houve uma melhoria na aprendizagem dos alunos. Foi importante realizar esta investigação pois pude pôr em prática a atribuição sistemática de feedback escrito aos trabalhos realizados pelos alunos e refletir sobre as suas implicações no desenvolvimento da comunicação escrita matemática dos alunos. Uma das limitações que tive na realização deste estudo foi a elaboração do relatório ter sido feito na mesma aula em que os alunos realizaram a tarefa, porque me apercebi apenas durante a análise dos dados que assim teriam tido mais tempo e em todas as partes das tarefas teriam tido oportunidade de aperfeiçoar a segunda versão do relatório.

No entanto, foi gratificante ter tido esta oportunidade porque me alertou sistematicamente para a necessidade de incentivar os alunos a utilizarem representações diferentes para explicarem as suas estratégias e também porque durante as entrevistas tive uma aproximação ao modo como os alunos pensam.

Referências

Abeledo, E. (1989). *A técnica da entrevista na investigación educativa*. Adaxe. Revista de Estudos e Experiências Educativas, 5.

Abrantes, P. (1994). *O trabalho de projecto e a relação dos alunos com a Matemática: a experiência do Projecto Mat789*. (Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.

Abrantes, P.; Leal, L.; Teixeira, P. & Veloso, E. (1997). *Mat789, Inovação Curricular em Matemática*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian. Abrantes, P., L. Serrazina, & I. Oliveira (1999). *A Matemática na educação básica*. Lisboa: ME/DEB.

Allal, L. (1986). Estratégias de avaliação formativa: Concepções psicopedagógicas e modalidades de aplicação. In L. Allal, J. Cardinet & Ph. Perrenoud (Orgs.), *A avaliação formativa num ensino diferenciado*, pp. 175-209. Coimbra: Almedina.

Bauersfeld, H. (1988). Interaction, construction and knowledge: Alternative perspectives for mathematics education. In D. Grouws, T. Cooney e D. Jones (Eds.), *Perspectives on research on effective mathematics teaching* (pp. 27-46). Reston: NCTM e Lawrence Erlbaum.

Bauersfeld, H. (1994). Theoretical perspectives on interaction in the mathematics classroom. In Biehler, R. Scholz, R. Sträßer, R. e Winkelmann, B. (Eds.), *Didactics of Mathematics as a scientific discipline* (pp. 133-146). Dordrecht: Kluwer Academic Pub.

Bauersfeld, H., Krummheuer, G. & Voigt, J. (1988). Interactional theory of learning and teaching mathematics and related microethnographical studies. In Steiner, H.e Vermandel, A. (Eds.), *Foundations and methodology of the discipline mathematics Education (Didactics of Mathematics) - Proceedings of the 2nd TME - Conference* (pp. 174-168). Antwerp: University of Antwerp.

Bishop, A.J. & Goffree, F. (1986). Classroom organization and dynamics. In Christiansen, B., Howson, A. G. & Otte, M. (Eds.) *Perspectives on mathematics education* (pp. 309-365). Dordrecht: D Reidel.

Black, P., Harrison, C., Lee, C., Marshall, B. & Wiliam, D. (2003). *Assessment for Learning. Putting it into practice*. London: Open University Press.

Black, P. & Wiliam, D. (1998). Assessment and classroom learning. *Assessment in Education, 5*(1), 7-74.

Black, P., Harrison, C., Lee, C., Marshall, B. & Wiliam, D. (2003). *Assessment for Learning. Putting it into practice*. London: Open University Press.

Blumer, H. (1998). *Symbolic interactionism: Perspective and method.* Berkeley: University of California Press. (trabalho original publicado em 1969).

Bogdan, R. & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em Educação: uma introdução à teoria e aos métodos.* Porto: Porto Editora.

Brendefur, J. & Frykholm, J. (2000). Promoting mathematical communication in the classroom: Two perspectives teachers' conceptions and practices. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 3(2), 125-153.

Bruner, J. (1999). Para uma teoria da educação. Lisboa: Relógio d'água

Bruno, I. (2006). *Avaliação das aprendizagens: O processo de regulação através do feedback –um estudo em Físico-Química no 3º ciclo do ensino básico*. (Tese de Mestrado, Universidadede Lisboa).

Buschman, L. (1995). Communicating in the language of mathematics. *Teaching Children Mathematics*, 1(6), 324-329.

Butler, R. (1998). Enhancing and undermining intrinsic motivation: the effects of taskinvolving and ego-involving evaluation on interest and performance. *British Journal of Educational Psychology, 58*, 1-14.

Carvalho, H. (1983). *Teoria da linguagem: Natureza do fenómeno linguístico e a análise das línguas.* (Vol. I). Coimbra: Coimbra Editora.

Christiansen, B.;Walter, G. (1986). Task and activity. In: Christiansen, B; Howson, A.G.;Otte, M.*Perspectives on mathematics education*. Dordrecht: D.Reidel.pp-243-307

Cobb, P. (2000). From representations to symbolizing: Introductory comments on semiotics and mathematical learning. In P. Cobb, E. Yackel e K. McClain (Eds.), *Symbolizing and communicating in mathematics classroom* (pp. 17-36). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Pub.

Cobb, P. & McClain, K. (2001). An approach for supporting teachers' learning in social context. In F. Lin e T. Cooney (Eds.), *Making sense of mathematics teacher education* (pp. 207-231). Dordrecht: Kluwer Academic Pub.

Cobb, P., Boufi, A., McClain, K. & Whitenack, J. (1997). Reflective discourse and collective reflection. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28(3), 258-277.

Cobb, P.,Wood, T., Yackel, E., e Mc Neal, B. (1992). Characteristics of classroom mathematics traditions: An interactional analysis. *American Educational Research Journal*, 29(3), 573-604.

Correia, E. (2004). *Avaliação das aprendizagens – uma carta de princípios. Cenários de avaliação*. Aveiro: Universidade de Aveiro.

DEB (2001). *Currículo nacional do Ensino Básico. Competências essenciais*. Lisboa: DEB, ME.

Dias, S. (2008). *O papel da escrita avaliativa na avaliação reguladora do ensino e das aprendizagens de alunos de 8º ano na disciplina de matemática*. (Tese de mestrado, Universidade de Lisboa).

Dias, S. & Santos, L. (2009). A*valiação reguladora, feedback escrito, conceitos matemáticos: Um triângulo de difícil construção*. *XXSIEM* (CD-ROM). Lisboa: APM.

Dias, P. & Santos, L. (2010) A intencionalidade de uma professora no desenvolvimento da auto-regulação das aprendizagens matemáticas. *Actas do XXI SIEM* pp. 109 - 125 Aveiro

Duval, R. (2003). Registos de Representação Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática. In S. Machado (Org), *Aprendizagem em Matemática, Registros de Representação Semiótica* (pp.11-33). Campinas. Papirus.

Ernest, P. (1996).Investigações, resoluções de problemas e pedagogia. In P.Abrantes, L.C.Leal, & J.P.Ponte (Eds), Investigar para aprender Matemática (pp.25-48). Lisboa:APM

Fonseca, H. (2000). *Os processos matemáticos e o discurso em actividades de investigação na sala de aula* (Tese de Mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.

Fernandes, Domingos (2005). *Avaliação das Aprendizagens: Desafios às Teorias, Práticas e Políticas.* Cacém: Texto Editores.

Freudenthal, H.(1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht: Reidel

Gipps, C. (1999). Socio-cultural aspects of assessment. *Review of Research in Education*, 24, 355-392.

Glasersfeld, E. (1996a). *Construtivismo radical: Uma forma de conhecer e aprender*. Lisboa: Instituto Piaget.

Gomes, A. (2005). *Auto-avaliação das aprendizagens dos alunos e investimento na apropriação de critérios*. (Tese de Mestrado, Universidade de Lisboa).

Godino, J. & Llinares, S. (2000). El interaccionismo simbólico en educación matemática. *Educación Matemática,* 12 (1), 70-92.

Gravemeijer, K., Cobb, P., Bowers, J. & Whitenack, J. (2000). Symbolizing, modeling, and instructional design. In P. Cobb, E. Yackel e K. McClain (Eds.), *Symbolizing and communicating in mathematics classroom* (pp. 225-273). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Pub.

Guba, E., & Lincoln, Y. (1989). *Fourth Generation Evaluation*. Beverly Hills, CA: Sage.

Goldin, G. (2008). *Perspectives on representation in mathematical learning and problema solving.* In L.English (Ed). Handbook of international research in mathematics education.New York, NY: Routledge.pp.178-203

Hadji, C. (1997). *Évaluation, règles du jeu*. Paris: ESF

Hadji, C. (1994). *A avaliação, regras do jogo: Das intenções aos instrumentos*. Porto: Porto Editora.

Johnson, R. (2004). Peer assessments in physical education. *Journal of Physical Education, Recreation, & Dance*. *75* (8), 33-41.

Jorro, A. (2000). *L´enseignantetl´évaluation.Desgestesévaluatifsenquestion. Bruxelles: DeBoeck Université.*

Kluger, A. N., DeNiasi, A. (1996) The effects of feedback intervention on performance: a historical review, a meta-analysis, and a preliminary feedback intervention theory. *Psychological Bulletin*, 119, p. 254-284.

Lampert, M. & Cobb, P. (2003). *Communication and learning in the mathematics classroom.* In J. Kilpatrick & D. Shifter, Eds. Research Companion to the NCTM Standards . Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, pp. 237-249.

Leal, L. C. (1992). *Avaliação da aprendizagem num contexto de inovação curricular.*(Tese de Mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.

Lester, J.B. (1996).Establishing a community of mathematics learners. In D. Schiffer (Ed).What’s happening in math class? The mathematics classroom: A community of inquiry (pp.88-102). New York: Teacher College Press

Machado, J. (1995). *Dicionário etimológico de língua portuguesa*. Lisboa: Livros Horizonte.

Martinho, M.H. & Ponte, J. P.(2005). Comunicação na sala de aula de Matemática: Práticas e reflexão de uma professora de Matemática. In: XVI SIEM – Seminário de Investigação em Educação Matemática. Évora.

Marques, R. (2008). *Matemática e Lingua Portuguesa: Laços para o sucesso?*. (Tese de Mestrado, Universidade de Lisboa)

Matos, J. & Carreira, S. (1994). Estudos de caso em educação matemática: Problemas actuais. *Quadrante*, 1, 19-53.

McClain, K.,e Cobb, P., (2001). An approach for supporting teachers' learning in social context. In F.Lin, & T.Cooney, Making sense of mathematics teacher education (pp.207-232).Dordrecht, The Netherlands: Kluwer

Menezes, L. (1996). *Concepções e práticas de professores de Matemática: Contributos para o estudo da pergunta.* Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Menezes, L.(1999) Matemática, Linguagem e Comunicação *Actas do ProfMat1999*. (CD-ROM). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Menezes, L. (2004). *Investigar para Ensinar Matemática: Contributos de um Projecto de Investigação Colaborativa para o desenvolvimento profissional de professores*. (Tese de Mestrado, Universidade de Lisboa).

Menezes, L., Santos, F., Silva, A. & Trindade, M.J. (2005). Investigar a comunicação matemática no 1º ciclo. *BragançaMat 2005*. *Encontro Regional de Professores de Matemática*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Menino, H. & Santos, L. (2004). Instrumentos de avaliação das aprendizagens em matemática. O uso do relatório escrito, do teste em duas fases e do portefólio no 2º ciclo do ensino básico. *Actas do XV SIEM* (Seminário de Investigação em Educação Matemática) (pp. 271-291). Lisboa: APM.

Menino, H. (2004). *O relatório escrito, o teste em duas fases e o portefólio como instrumento de avaliação das aprendizagens em Matemática – um estudo no 2º ciclo do Ensino Básico*. (Tese de Mestrado, Universidade de Lisboa).

Merrian, S. (1988). *Case study research in education: A qualitative approach*. San Francisco, CA: Jossey-Bass.

NCTM (1980). *An agenda for action.* Reston, VA: NCTM.

NCTM (1991). *Normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar.* Lisboa: APM e IIE (Trabalho original publicado em 1989).

NCTM (1994). *Normas profissionais para o ensino da matemática.* Lisboa: APM e IIE (Trabalho original publicado em 1991).

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

NCTM (2007). Princípios e Normas para a Matemática Escolar. Lisboa:APM.(Trabalho original em Inglês, publicado em 2000)

Noonan, B. & Duncan, C.R. (2005). Peer and self-assessment in high schools. *Practical Assessment, Research and Evaluation,* 10 (17). Retirado dia 8 de Outubro de 2007, de http://pareonline.net/pdf/v10n17.pdf.

Nunziati, G. (1990). Pour construire un dispositif d'évaluation formatrice. *CahiersPédagogiques, 280*, 47-64.

Pedrosa, M. (2000). A comunicação na sala de aula: As perguntas como elementos estruturadores da interacção didáctica. In C. Monteiro, F. Tavares, J. Almiro, J. Ponte, J. Matos e L. Menezes (Eds.). *Interacções na aula de Matemática* (pp. 140-161). Viseu: SPCE.

Pereira, A. (1991). *Comunicação e ensino das ciências: Contributo para o estudo da pergunta no discurso da aula de ciências do ensino básico*. (Tese de mestrado, Universidade de Lisboa).

Perrenoud, P. (1999). *Construir as competências desde a escola*. Porto Alegre:ARTMED Editora. (obra original em francês, publicada em 1997).

Pimm, D. (1991). Communicating mathematically. In K. Durkin e B. Shire (Eds.), *Language in mathematical education: Research and practice* (pp. 17-23). Philadelphia: Open University Press.

Pimm, D. (1994a). Mathematics classroom language: Form, function and force. In R. Biehler, R. Scholz, R. Sträßer e B. Winkelmann (Eds.), *Didactics of mathematics as a scientific discipline* (pp. 159-175). Dordrecht: Kluwer Academic Pub.

Pinto, J. (2003). A Avaliação e a aprendizagem: da neutralidade técnica à intencionalidade pedagógica. *Educação e Matemática*, 74, 3-9.

Pinto, J. & Santos, L. (2006). *Modelos de avaliação das aprendizagens.* Lisboa: Universidade Aberta.

Pinto, J. & Santos, L. (2003). O que pensam os alunos sobre a avaliação?. *Educação e Matemática*, 74, 85.

Pirie, S. (1998). Crossing the gulf between thought and symbol: Language as (slippery) stepping-stones. In H. Steinbring, M. Bussi e A. Sierpinska (Eds.), *Language and communication in the mathematics classroom* (pp. 7-29). Reston: NCTM.

Ponte, J.P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.). O professor e o desenvolvimento curricular (pp.11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2006). Estudos de caso em educação matemática. *Bolema, 25*, 105-132.

Ponte, J. & Serrazina, M. (2000). *Didáctica da Matemática do 1.º ciclo.* Lisboa: Universidade Aberta.

Ponte, J. P., Guerreiro, A.,Cunha, H., Duarte, J., Martinho, H.,Martins, C., Menezes, L., Menino, H., Pinto, H., Santos, L., Varandas, J. M., Veia, L., & Viseu, F. (2007). A comunicação nas práticas de jovens professores de Matemática. *Revista Portuguesa de Educação*, 20(2), 39-74.

Ponte, J.P., Serrazina, L., Guimarães, H., Breda, A. Guimarães, F., Sousa, H., Menezes, L., Martins, M.E. & Oliveira, P. (2007). *Programa de matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação – DGIDC

Ponte, J. P., Matos, J. F. & Abrantes, P. (1998). *Investigações em educação matemática: implicações curriculares*. Lisboa: IIE:

Sá, I. (2004). Os componentes motivacionais da aprendizagem auto-regulada. In A. L. Silva; A. M. Duarte; I. Sá & A. M. V. Simão (Ed.) *Aprendizagem Auto-Regulada pelo Estudante* (pp.55-75). Porto: Porto Editora.

Santos, L. (2002). A avaliação em documentos orientadores para o ensino da Matemática: Uma análise sucinta. *Quadrante*, vol. XII (1), 7-20.

Santos, L. (2002). Auto-avaliação regulada: porquê, o quê e como? In Paulo Abrantes e Filomena Araújo (Orgs.), *Avaliação das Aprendizagens. Das concepções às práticas* (pp. 75-84). Lisboa: Ministério da educação, Departamento do Ensino Básico.

Santos, L. (2003). Avaliar competências: uma tarefa impossível*? Educação e Matemática*, 74, 16-21

Santos, L. (2003). A investigação em Portugal na área da avaliação pedagógica em Matemática. Actas do XIV *SIEM* (Seminário de Investigação em Educação Matemática) (pp. 9-27). Lisboa: APM.

Santos, L. (2003). Editora convidada da revista Quadrante, vol. XII, *1*.

Santos, L. (2004). O ensino e a aprendizagem da matemática em Portugal: Um olhar através da avaliação. *Actas del octavo simposio de la sociedad española de investigación en educación matemática (S.E.I.E.M.)* (pp. 127-151). Coruña: Universidade da Coruña

Santos, L. (2005). A avaliação das aprendizagens em Matemática: Um olhar sobre o seu percurso. In L. Santos, A. P. Canavarro & J. Brocardo (Orgs.), *Educação e matemática: Caminhos e encruzilhadas. Actas do encontro internacional em homenagem a Paulo Abrantes* (pp. 169-187). Lisboa: APM.

Santos, L. (2008). Dilemas e desafios da avaliação reguladora. In L. Menezes; L. Santos; H. Gomes & C. Rodrigues (Eds.), *Avaliação em Matemática: Problemas e desafios* (pp. 11-35). Viseu: Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação.

Santos, L. & Dias, S. (2006). Como entendem os alunos o que lhes dizem os professores? A complexidade do feedback. *Actas do ProfMat2006*. (CD-ROM). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Santos, L. & Pinto, J. (2003). O que pensam os alunos sobre a avaliação? *Educação e Matemática*, 74.

Santos, L. (2004). La evaluación del aprendizaje en matemáticas: orientaciones y retos. In J. Giménez; L. Santos & J. P. Ponte (Coords.), *La actividad matemática en el aula*. Barcelona: Editorial Graó.

Santos, L., Brocardo, J., Pires, M.,& Rosendo, A.I.(2002). Investigações matemáticas na aprendizagem do 2ºciclo do ensino básico ao ensino superior. In J.P. Ponte, C. Costa, A.I.Rosendo, E.Maia, N.Figueiredo & A. F.Dionísio (Orgs.), Actividades de investigação na aprendizagem da Matemática e na formação de professores (pp.83-106). Lisboa:SPCE.

Semana, S. (2008). *O relatório escrito enquanto instrumento de avaliação reguladora das aprendizagens dos alunos do 8º ano de escolaridade em Matemática*. (Tese de mestrado, Universidade de Lisboa).

Semana, S. & Santos, L. (2008a). A avaliação e o raciocínio matemático. *Educação e Matemática*, 100, 51-60.

Semana, S. & Santos, L. (2008b). Porque é importante explicar como pensei: os relatórios escritos na regulação das aprendizagens em Matemática. *ProfMat2008* (CD-ROM). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Semana, S. & Santos, L. (2009). Estratégias de avaliação na regulação das aprendizagens em Matemática. *XXSIEM (CD-ROM)*. Lisboa: APM.

Serrazina, M.L.,Canavarro, A.P.,Guerreiro, A.,Rocha, I.,& Portela, J.(2008). *Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores dos 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico* (2ª versão). Lisboa: DGIDC

Sfez, L.(1991).*A comunicação*: Instituto Piaget.

Shannon, C. (1948). A Mathematical Theory of Communication. The Bell System Technical Journal, Vol.27.379-423,623-656, July-October.

Sierspinska, A. (1998). Three epistemologies, three views of classroom communication: Constructivism, sociocultural approaches, interactionism. In H. Steinbring, M. Bussi e A. Sierpinska (Eds.), *Language and communication in the mathematics classroom* (pp. 30-62). Reston: NCTM.

Silva, A. L. (2004). A auto-regulação na aprendizagem. In A. L. Silva; A. M. Duarte; I.Sá & A. M. V. Simão (Eds.) *Aprendizagem Auto-Regulada pelo Estudante* (pp.17-39). Porto: Porto Editora.

Silva, A. L. & Sá, I. (2003). Auto-regulação e aprendizagem. *Investigar em Educação*, *2*, 71-90.

Sousa, F., Cebolo, V., Alves, B. e Mamede. E. (2009). Comunicação matemática: Contributos do PCFM na Reflexão das Práticas de Professores. Acedido em 10 de Maio de 2010, em:

http://www.apm.pt/files/_CO_Sousa_Cebolo_Alves_Mamede_4a41313eee16e.pdf

Steinbring, H., Bussi, M. & Sierpinska, A. (1998). Epilogue. In H. Steinbring, M. Bussi e A. Sierpinska (Eds.), *Language and communication in the mathematics classroom* (pp. 341-346). Reston: NCTM.

Varandas, J. (2000). Avaliação *de investigações matemáticas. Uma experiência.* (Tese de Mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.

Vygotsky, L. (2003). *Pensamento e linguagem.* São Paulo: Martins Fontes.

Voigt, J. (1994). Negotiation of mathematical meaning and learning mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 26, 275-298.

Voigt, J. (1995). Thematic patterns of interaction and sociomathematical norms. In P. Cobb e H. Bauersfeld (Eds.), *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures* (pp. 163-201). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Pub.

Wiliam, D. (1999). Formative assessment in mathematics. *Equals: Mathematics and Special Educational Needs, 5*(3), 8-11.

Wiliam, D. (2007). Keeping Learning on Track: Formative Assessment and the Regulation of Learning. In F. K. Lester Jr. (ed.) *Second Handbook of Mathematics Teaching and Learning*, (pp. 1053–1098). Greenwich, CT: Information Age Publishing.

Wood, T. (1994). Patterns of interaction and the culture of mathematics classrooms. In S. Lerman (Ed.), *Culture perspectives on the mathematics classroom* (pp. 149-168). Dordrecht, NL: Kluwer Academic Pub.

Wood, T. (1995). An emerging practice of teaching. In P. Cobb e H. Bauersfeld (Eds.), *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures* (pp. 203-227). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Pub.

Wood, T. (1998a). Alternative patterns of communication in mathematics classes: Funneling or focusing? Em H. Steinbring, M. Bartolini Bussi, & A. Sierpinska (eds.), *Language and communication in the mathematics classroom* Reston, VA: NCTM

Wood, T.,Cobb, P., & Yackel, E. (1991). Changing in teaching mathematics: a case of study.*American Educational Research Journal*, 28(3), 587-616.

Yackel, E. (1995). Children's talk in inquiry mathematics classroom. In P. Cobb e H. Bauersfeld (Eds.), *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures* (pp. 131-162). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Pub.

Yackel, E. e Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(4), 458-477.

Yin, R. (2002). *Case study research: Design and methods* (Third Ed.). Newbury Park: Sage.

Anexo 1
Carta para os encarregados de educação dos alunos autorizarem a sua participação no estudo

Anexo 2
Questionário para caracterização dos alunos

Anexo 3
Guião da entrevista semi-estruturada

Anexo 4
Guião de elaboração do relatório

Anexo 5
Enunciado da tarefa 1

Anexo 6
Enunciado da tarefa 2

Anexo 7
Enunciado da tarefa 3

Anexo 8
Enunciado da tarefa 4

Anexo 9
Enunciado da tarefa 5

Assunto: Pedido de consentimento à Direcção para recolha de dados para desenvolvimento de Tese de Mestrado

Exma. Directora

Sou professora contratada no Agrupamento, na Escola Básica 2,3/S de Santo António do grupo 230 (Matemática e Ciências da Natureza), tendo licenciatura em Ensino Básico, Variante de Matemática e Ciências, pela Escola Superior de Educação de Lisboa, do Instituto Politécnico de Lisboa.

Estou neste momento inscrita no Mestrado em Educação, com especialização em Didáctica da Matemática, do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa. Durante o ano lectivo 2010/2011 irei desenvolver a minha dissertação de Mestrado sobre Comunicação Escrita Matemática em alunos do 2º ciclo do Ensino Básico, que será orientada pela Professora Doutora Leonor Santos.

A investigação que proponho fazer tem como objectivo principal compreender e analisar o contributo das produções escritas em Matemática de alunos do 2º.ciclo, quando acompanhadas de feedback fornecido pelo professor, para o desenvolvimento da sua comunicação escrita matemática. Para tal, proponho utilizar as produções escritas de alunos de uma das minhas turmas de 5º ano.

Venho então, por este meio, solicitar a autorização da Direcção para proceder à minha investigação na Escola Básica 2,3 com Secundário de Santo António, garantindo a confidencialidade da escola e dos alunos participantes na tese e em qualquer artigo publicado que decorra do estudo.

Na expectativa que a resposta seja favorável, com os melhores cumprimentos

(Patricia Martins)

Exmo. Sr. Encarregado de Educação

Sou professora de Matemática e estou a frequentar o Mestrado em Didáctica da Matemática, no Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

Durante o ano lectivo 2010/2011 irei desenvolver a minha dissertação de Mestrado sobre Comunicação Escrita Matemática em alunos do 2º ciclo do Ensino Básico.

A investigação que proponho fazer tem como objectivo principal compreender e analisar o contributo das produções escritas em Matemática de alunos do 2º.ciclo, quando acompanhadas de feedback fornecido pelo professor, para o desenvolvimento da sua comunicação escrita matemática, tendo já sido dada autorização pela direcção da escola para o desenvolvimento deste estudo.

Será necessário proceder à recolha de produções escritas, gravação, em áudio, de algumas aulas de Matemática e recorrer à realização de entrevistas para conhecer a opinião dos alunos relativamente ao assunto em estudo. Para o efeito, solicito a sua autorização para entrevistar e gravar em áudio o seu educando, assim como a recolha das suas produções escritas.

Saliento que os dados recolhidos serão usados exclusivamente como materiais de trabalho, estando garantida a privacidade e anonimato dos participantes. Manifesto, ainda, a minha inteira disponibilidade para prestar qualquer esclarecimento que considere necessário.

Na expectativa de uma resposta favorável, subscrevo-me com os melhores cumprimentos.

A Professora

____

(Patricia Martins)

✄____

Autorização

Eu, ____, Encarregado de Educação do aluno ________________________________, nº___, da turma____, autorizo que a Professora Patricia Martins recolha as produções escritas, entreviste e grave em áudio o meu educando, no âmbito da investigação que me foi dada a conhecer.

Local_________________________________, Data ____./_____/2011

___________________________________(Assinatura do Encarregado de Educação)

Este questionário vem no decorrer de uma investigação sobre o desenvolvimento da comunicação escrita matemática em alunos do 5º ano de escolaridade e tem como objectivo caracterizar a turma.

Leia com atenção e de seguida responda às questões que lhe são colocadas.

1- Qual a sua idade? _____

2- Qual o seu passatempo favorito? (Numere de 1 a 5, sendo o 1 correspondente ao passatempo com maior preferência)
____ Desporto
____ Internet
____ Jogos
____ Leitura
____ Música
____ TV

3- Durante o seu percurso escolar teve retenções?
____ Sim ____ Não

4- Se respondeu **sim** à pergunta anterior indique os anos em que teve as retenções, assinalando-os com uma cruz (X).
____ 2ºano
____ 3ºano
____ 4ºano
____ 5ºano

5- Como se descreve como aluno? Assinale com uma cruz (X) as características que considera ter como pontos fortes.
____ Ser pontual
____ Ser cumpridor das regras de sala de aula estabelecidas
____ Ser cooperante com os colegas na realização de trabalhos em grupo
____ Ser oralmente participativo nas discussões em grupo
____ Ser oralmente participativo nas discussões da turma em colectivo
____ Ser empenhado na realização de todas as tarefas propostas na aula
____ Ser empenhado na realização de todos os trabalhos fora da aula
____ Ser organizado nos registos do caderno diário
____ Outros ____

6- Indique quais as maiores dificuldades que sente enquanto aluno.
____
____

7- Qual a sua disciplina favorita? ____

E qual a disciplina que menos gosta? ____

8- Indique o que mais gosta na disciplina de Matemática.
____
____

9- Indique o que não gosta na disciplina de Matemática.
____
____

10- Tem alguém que o ajude no estudo ou na realização de trabalhos na disciplina de Matemática?
____ Sim ____ Não

11- Se respondeu **sim** à pergunta anterior, assinale com uma cruz (x) a(s) opção(ões) que melhor traduz(em) a sua situação.
____ Amigos/Familiares
____ Colegas da turma
____ Encarregado de Educação
____ Explicador
____ Professor

12- Na disciplina de Matemática tem dificuldades na realização das tarefas? (entre as opções seguintes, assinale com uma cruz as que indicam as suas principais dificuldades)
____ Compreender os enunciados das tarefas propostas
____ Resolver os problemas
____ Explicar o raciocínio
____ Explicar as dúvidas ou dificuldades
____ Efectuar cálculos
____ Efectuar medições
____ Avaliar o trabalho realizado

13- Como considera o seu desempenho na disciplina de Matemática? Assinale com uma cruz (x) a opção que lhe corresponde.
____ Não satisfatório
____ Pouco satisfatório
____ Satisfatório
____ Bom
____ Muito Bom

Obrigada pela sua colaboração
Professora Patricia Martins

Guião da 1ª Entrevista

Notas de campo

Identificação do aluno e explicação do objectivo da entrevista.		
Concepções do aluno sobre a Matemática	1- Para cada uma das situações apresentadas diga se são sobre Matemática ou não. Explique as suas razões. 2- O que pensa sobre a Matemática? Qual a sua utilidade? 3- Para si qual o tempo necessário para a resolução de um problema de Matemática? Caso não consiga resolvê-lo nesse tempo, o que deve fazer?	
Visão do aluno sobre a disciplina de Matemática	4- Qual a disciplina que mais gosta? Porquê? 5- Qual a disciplina que menos gosta? Porquê? 6- Gosta de Matemática ou não? Porquê? 7- Por favor descreva uma aula de Matemática que tenha gostado especialmente. **Questões a responder no caso de alguns aspectos não terem sido mencionados na resposta à questão 7:** 8- Na disciplina de Matemática tudo tem de ser ensinado aos alunos ou podem sozinhos descobrir coisas novas? 9- Qual o tipo de tarefas que mais gosta nas aulas de Matemática? 10- Se fosse professor de Matemática como	

Visão do aluno sobre a disciplina de Matemática	faria para ajudar os alunos a aprenderem? 11- Como seria para si uma boa aula de Matemática? 12- O que é para si mais importante nesta disciplina? Porquê? 13- O que costuma fazer quando tem dificuldade na realização das tarefas? 14- E quando comete erros? 15- Explique o que mais gosta e o que menos gosta de fazer nas aulas de Matemática?	
Dificuldades dos alunos na comunicação matemática escrita	16- Na disciplina de Matemática tem dificuldade na compreensão dos enunciados das tarefas propostas? 17- Para si, quais as razões dessa dificuldade? 18- Tem dificuldade em explicar o seu raciocínio? 19- Essa dificuldade é maior quando a explicação é feita oralmente ou por escrito? 20- Quando sente dúvidas ou dificuldades o que faz para ultrapassá-las?	
Concepções dos alunos sobre a avaliação na disciplina de Matemática	21- Quando ouve falar em avaliação qual a primeira ideia que lhe vem à cabeça? 22- Na sua opinião para que serve a avaliação? 23- Como deve ser feita a avaliação na disciplina de Matemática? O que deve ser valorizado? 24- Quando recebe um instrumento de avaliação corrigido e classificado volta a	

Concepções dos alunos sobre a avaliação na disciplina de Matemática	usá-lo em algum outro momento? 25- Quando recebe um trabalho corrigido pelo professor, sem estar classificado, mas com comentários escritos, o que costuma fazer? a) Não lê os comentários. b) Lê com atenção os comentários mas não altera nada. c) Lê com atenção os comentários e altera apenas alguns aspectos. d) Lê com atenção os comentários e volta a fazer o trabalho todo de início.	

Guião de elaboração do relatório

Objetivos do relatório escrito:

- Desenvolver a comunicação escrita matemática;

- Desenvolver o sentido crítico sobre o trabalho efectuado;

- Aprofundar o conhecimento sobre os assuntos que envolvem a tarefa;

Para elaborares o relatório escrito sobre a tarefa 2 deves ter em atenção:

- Identifica o relatório com o nome dos elementos do grupo

- Descreve o raciocínio de forma clara e organizada. Deves incluir todas as descobertas e tentativas que fizeste até chegares a uma conclusão.

- Organiza o relatório em introdução, desenvolvimento e conclusão.

Introdução - apresentação e indicação dos objetivos da tarefa pelas vossas palavras.

Desenvolvimento:

- Relato do que foi feito, descrevendo tudo o que foi pensado e as estratégias utilizadas;

- Descrição das dificuldades sentidas e como foram ultrapassadas;

Conclusões:

- Apresentação das conclusões devidamente fundamentadas (pode ser utilizado também tabelas ou esquemas).

- Resumo do que aprenderam com a tarefa e comentário global sobre o trabalho.

Descobre as maneiras diferentes de colorir a figura 2 utilizando uma só cor. Elabora um relatório escrito sobre a tarefa, tendo em conta as questões 2.1 e 2.2.

2.1-Descreve o critério que utilizaste.

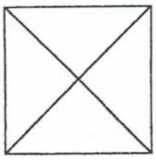


Figura 2

2.2-E com duas cores?

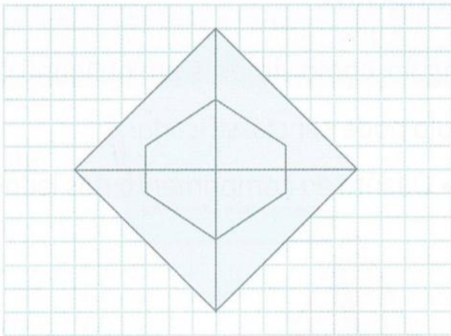
serva atentamente a figura ao lado.

presenta, no teu caderno:

1 um quadrilátero representado na figura;

2 um pentágono representado na figura;

3 um heptágono representado na figura.



Já aprendeste que um múltiplo de um número é qualquer produto desse número por um número inteiro. Assim, alguns múltiplos de 3 são 0, 3, 6, 9, 12, 15, …

a) Indica os próximos três múltiplos de 3.

b) Indica os oito primeiros múltiplos de 4.

c) Nas respostas às duas alíneas anteriores, encontras alguns números em comum. Quais? O que têm estes números em comum?

Eratóstenes de Cirene (273 a. C. – 194 a. C.), utilizou um método muito simples para descobrir uns números especiais chamados números primos. Vamos utilizar o seu método para descobrir os números primos até 100.

d) Constrói, no teu caderno, uma grelha igual à apresentada ao lado e procede da seguinte forma:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

1. risca o 1;
2. rodeia o 2 e risca todos os outros múltiplos de 2;
3. rodeia o 3 e risca todos os outros múltiplos de 3;
4. rodeia o 5 e risca todos os outros múltiplos de 5;
5. rodeia o 7 e risca todos os outros múltiplos de 7;
6. rodeia todos os números que não estão riscados.

e) Observa, com atenção, os números que rodeaste. O que têm em comum esses números?

f) Todos os números que estão riscados não são primos. Encontra uma justificação para esse facto.

g) Explica porque não é necessário riscar o 4 e todos os seus múltiplos.

h) Utilizando um lápis de cor risca todos os múltiplos de 12 que não estejam riscados. O que verificaste? Porque terá acontecido?

i) Se um dos teus colegas de turma se tivesse esquecido de riscar o 90, e, por isso, afirmasse que o 90 era um número primo, explica como o poderias convencer do seu erro.

j) Supõe que um dos teus colegas de turma pretende aumentar o crivo até 150, para descobrir se o número 135 é primo. Achas que ele tem necessidade de o fazer? Explica que o número não é primo, sem recorrer ao crivo.

1. Mede o perímetro da base de cada um dos objetos com um fio e regista na tabela.
2. Mede com a régua o diâmetro da base de cada um dos objetos e regista na tabela.

Objeto	Perímetro do círculo	Diâmetro	Perímetro:diâmetro

3. Consegues identificar alguma relação entre o perímetro e o diâmetro da base de cada um dos objetos? Explica o teu raciocínio.

4. Imagina que o Luís se esqueceu de registar um dos valores do perímetro, tal como está na tabela:

Objeto	Perímetro do círculo	Diâmetro	Perímetro:diâmetro
panela		5	3,14159

a) Serás capaz de completar a tabela? Explica como procedeste.

5. Regista as conclusões sobre o perímetro do círculo que aprendeste com esta tarefa.